

1 Representación de Sistemas Físicos

El estudio de los sistemas de control requiere un conocimiento previo de los sistemas físicos sobre los cuales se implantará alguna estrategia de control, en lo que respecta a la representación matemática de los mismos y al análisis de su comportamiento dinámico.

Este capítulo se dedicará a la representación matemática de sistemas físicos, la cual comenzará con el desarrollo de un modelo matemático a partir del cual podrá obtenerse otro tipo de representación. Más específicamente, el modelo matemático de un sistema será desarrollado inicialmente como un conjunto de ecuaciones diferenciales, de las cuales se obtendrán otras representaciones, como son, funciones de transferencia, diagramas de bloques y diagramas de flujo de señal.

1.1. Modelaje de Sistemas Físicos

El método de modelaje a utilizar se fundamenta en una filosofía propuesta por Henry Paynter y desarrollada posteriormente por Dean Karnopp y Donald Rosemberg. En el mismo, la recepción, acumulación, disipación y transmisión de energía dentro de un sistema son fundamentos para la concepción final del modelo a desarrollar.

En este capítulo se describirá la metodología a utilizar, la cual consiste en una simplificación de la filosofía de modelaje antes mencionada. Con ello será posible el desarrollo de modelos simples, que posteriormente podrán ser utilizados para el estudio de los sistemas de control. En principio se requiere el reconocimiento de los distintos tipos de elementos que formen parte de los sistemas físicos a representar, de forma tal que, a partir de los mismos sea posible obtener el modelo deseado. Tomando en consideración la forma en la cual manejan la energía es posible reconocer los siguientes elementos básicos dentro de un sistema:

- *Fuentes de energía*, son elementos que proporcionan energía proveniente del medio externo. Este tipo de elemento representa la influencia del medio sobre el proceso a analizar y pueden interpretarse como las entradas que tendrá el sistema bajo estudio.
- *Almacenadores de energía*, son los únicos elementos capaces de almacenar y ceder energía, por lo que definen la dinámica del sistema y generalmente son de dos tipos, llamados *Inercias* y *Capacitores*, según el tipo de energía que almacenan.
- *Resistencias*, son elementos que generalmente provocan pérdidas de energía al medio exterior y en algunos casos son utilizados como elementos que definen algún tipo de transferencia de energía entre distintos tipos de elementos.
- *Transformadores de energía*, son elementos que permiten la transformación de un tipo de energía a otro en un sistema, o del mismo tipo pero modificando su magnitud.

Cabe destacar que los modelos a desarrollar en este libro serán solamente modelos de sistemas físicos, específicamente, modelos para sistemas mecánicos, fluidicos, eléctricos y térmicos. De allí que en las próximas secciones, se identificarán los distintos tipos de elementos para cada uno de los sistemas mencionados y se mostrarán ejemplos específicos, gracias a los cuales se pretende lograr una comprensión completa del tema propuesto. Así mismo, se reconocerán para cada tipo de sistema, las variables fundamentales que permitirán el planteamiento de las ecuaciones necesarias para definir los modelos a realizar.

Finalmente, es importante resaltar que la metodología aquí planteada pretende generalizar la forma en que se obtendrán los modelos, sin importar la índole del sistema a modelar, lo cual facilita ampliamente la consecución de los mismos.

1.1.1. Sistemas Mecánicos

El estudio de los sistemas mecánicos será dividido en dos partes, el primero será el estudio de los llamados Sistemas Mecánicos Traslacionales, en los cuales los cuerpos solamente presentan un movimiento de traslación; y los segundos serán los Sistemas Mecánicos Rotacionales, en los cuales los cuerpos presentan un movimiento de rotación.

1.1.1.1. Sistemas Mecánicos Traslacionales

En esta sección se identificarán cada uno de los elementos que forman parte de los sistemas mecánicos traslacionales según la clasificación mencionada en la sec. 1.1, así mismo, se mostrarán las ecuaciones generales que los describen.

Fuentes de Energía

Serán consideradas dos diferentes formas de fuentes de energía, aquellas que proporcionan una fuerza aplicada en algún punto del sistema y las que proporcionan una velocidad.

Es importante recordar que las fuentes son los elementos que permiten modelar la influencia del medio externo sobre el sistema, es decir, la forma en que el medio interactúa con el sistema. En principio, estas fuentes serán independientes de lo que sucede dentro del sistema, pero si los modelos desarrollados son utilizados para el planteamiento de algún sistema de control, alguna de estas fuentes podrán ser moduladas.

Almacenadores de Energía

Tal como se mencionó con anterioridad existen dos tipos de almacenadores de energía dependiendo del tipo de energía que almacenan. Para los sistemas mecánicos, la energía se almacena en forma de energía cinética y potencial, lo que dará lugar a los elementos almacenadores que se describen a continuación.

Inercia

El primer elemento identificado como de energía será una masa en movimiento, la cual almacena energía en forma de energía cinética. Esquemáticamente es posible representarla como se muestra en la fig. 1.1, donde F es la fuerza aplicada sobre la masa, m el valor característico de la misma y v la velocidad a la cual se desplaza.

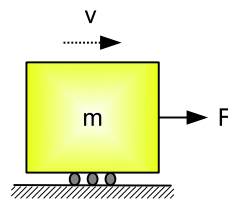


Figura 1.1: Inercia Mecánico Traslacional

Para cada elemento se definirán las ecuaciones que lo representan matemáticamente, siendo en este caso la ecuación de momentum (Ec. 1.1) la indicada para representar al elemento en cuestión, donde p es la cantidad de movimiento lineal de la masa y su derivada corresponde con la fuerza F aplicada sobre la masa. De allí que, derivando la Ec. 1.1, se obtiene la Ec. 1.2 que representará la dinámica del elemento.

$$p = mv \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (1.2)$$

Dicha ecuación representa en forma general, la dinámica del elemento, en la cual se pueden considerar variaciones en el parámetro característico m . Si se considera la masa del elemento como una constante, la Ec. 1.2 puede ser reescrita, para ese caso lineal, como sigue,

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (1.3)$$

Finalmente, se definirá a la velocidad v como la variable de estado del elemento, pues, conocida la misma en todo momento, se conocerá la energía cinética almacenada en el mismo.

Capacitor

El otro elemento identificado como almacenador de energía será un resorte, el cual almacena energía en forma de energía potencial. Esquemáticamente, un resorte puede ser representado como se muestra en la Fig. 1.2.

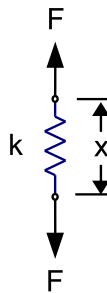


Figura 1.2: Capacitor Mecánico Traslacional

La fuerza F , transmitida por el resorte, depende del desplazamiento relativo entre sus extremos, representado por x , y de la constante de elasticidad del resorte k , la cual puede ser constante o dependiente del valor de x , siendo la Ec. 1.4 la que representa el comportamiento de este elemento. Derivando la Ec. 1.4 se obtiene la Ec. 1.5, que describe la dinámica del elemento, en la cual se pueden considerar variaciones en el parámetro característico k .

$$F = kx \quad (1.4)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(kx) \quad (1.5)$$

Para el caso particular en el cual se considere constante el parámetro k , la Ec. 1.5 puede ser reescrita, para ese caso lineal, como sigue,

$$\frac{dF}{dt} = k \frac{dx}{dt} = kv$$

Finalmente, se definirá a la fuerza F como la variable de estado del elemento, pues, conocido el valor de la misma en todo momento, se conocerá la energía potencial almacenada en el elemento. Cabe destacar que en este caso, el desplazamiento x también puede ser considerado como la variable de estado del elemento, dado que F y x guardan una relación entre sí, tal como se mostró en la Ec. 1.4.

Resistencias

Las pérdidas de energía en este tipo de sistemas, son las pérdidas por fricción, como por ejemplo, el roce entre dos superficies y el roce o resistencia al viento, entre otras. Este tipo de resistencias son representadas a través de una relación entre la fuerza de roce que se opone al movimiento y la velocidad relativa entre los cuerpos involucrados en el fenómeno, tal como se muestra en la Ec. 1.6. Esta ecuación puede ser una relación lineal o no lineal dependiendo de cada caso en particular.

$$F = f(v) \quad (1.6)$$

Adicionalmente, existen elementos conocidos como amortiguadores, cuyo esquema se presenta en la Fig. 1.3, los cuales pueden ser representados como resistencias pues provocan pérdidas por fricción.

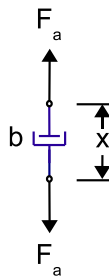


Figura 1.3: Resistencia Mecánico Traslacional

En este caso, la fuerza producida por el amortiguador F_a , se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad entre los extremos, v , tal como se aprecia en la Ec. 1.7, en la cual b representa el parámetro característico del elemento y es conocido como factor de amortiguación.

$$F_a = bv \quad (1.7)$$

Transformadores de Energía

Los transformadores de energía son elementos que, tal como su nombre lo indica, transforman o convierten la energía entre dos puntos de un sistema. En principio, estos elementos ni almacenan ni disipan energía, lo cual no quiere decir que ello no podría ser considerado para un caso particular. A continuación se mostrarán algunos ejemplos de transformadores propios de los Sistemas Mecánicos Traslacionales.

En la Fig. 1.4 se muestra una barra ideal sin masa y sin ningún tipo de fricción con el entorno, en la cual se tiene en un extremo una fuerza aplicada F_1 y una velocidad v_1 , las cuales son transmitidas al otro extremo como una fuerza F_2 y una velocidad v_2 . Considerando que la sumatoria de los torques en el apoyo es igual a cero, es posible encontrar una relación entre las fuerzas en función de las longitudes de la barra. De la misma forma las velocidades en los extremos son calculadas a partir de la velocidad angular a la cual gira la barra. A partir de estas consideraciones es posible escribir las Ecs. 1.8 y 1.9, las cuales relacionan cada una de las variables mencionadas anteriormente.

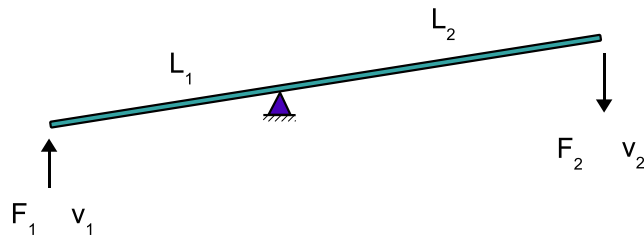


Figura 1.4: Barra Ideal

$$F_1 L_1 = F_2 L_2 \quad (1.8)$$

$$v_1 L_2 = v_2 L_1 \quad (1.9)$$

Cabe destacar que el transformador previamente mencionado es un elemento que conecta dos partes de un sistema y que recibe el mismo tipo de variable que entrega, es decir, por un lado se reciben fuerza y velocidad y por el otro lado se entregan los mismos tipos de variables.

A continuación se muestra el esquema de una polea, en la Fig. 1.5, la cual es considerada como un transformador con la diferencia de que en los extremos del elemento las variables no son las mismas.

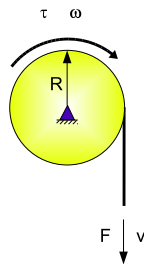


Figura 1.5: Polea Ideal

En este caso las ecuaciones que relacionan las variables involucradas quedarán en función del radio de la polea, siendo las mismas las que se muestran a continuación.

$$v = R\omega \quad F = \frac{\tau}{R}$$

A continuación se desarrollará un modelo sencillo para este tipo de sistema con la intención de afianzar la comprensión del método de modelaje aquí mostrado.

Ejemplo 1.1 .

En la Fig. 1.6 se muestra un esquema simplificado de una locomotora, donde F es la fuerza impulsora, m_1 y m_2 las masas de los vagones, k la constante de elasticidad del resorte, R_1 la constante del amortiguador y R_2 el parámetro asociado con la fricción entre las ruedas y la superficie. Las relaciones que definen la fuerza en el amortiguador y la fuerza de roce se muestran en las Ec. 1.10 y 1.11, respectivamente. A partir de esta información se desea que obtenga un modelo que represente el comportamiento dinámico del sistema.

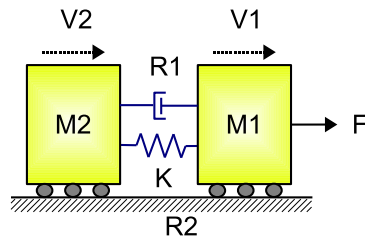


Figura 1.6: Esquema de una Locomotora

$$F_a = R_1 v \tag{1.10}$$

$$F_F = R_2 v^2 \tag{1.11}$$

Solución

En principio es importante realizar un reconocimiento de los diferentes elementos que conforman el sistema, a partir de lo cual será posible anticipar el número de ecuaciones que tendrá el modelo, así como, las variables que estarán involucradas en él. A continuación se resumen dichos elementos resaltando, para los elementos almacenadores, las variables de estado involucradas.

Fuentes	Fuerza (F)		
Almacenadores	Inercia 1 (v_1)	Inercia 2 (v_2)	Capacitor (F_R)
Resistencias	Amortiguador	Fuerza Roce 1	Fuerza Roce 2

Como se tienen tres elementos almacenadores cuyas variables de estado, v_1 , v_2 y F_R , son independientes entre sí, se tendrá un modelo con tres ecuaciones diferenciales de primer grado, una por cada una de las variables de estado mencionadas. Dichas ecuaciones solamente podrán estar en función de las entradas y de las variables de estado, las cuales se obtendrán planteado las ecuaciones de cada uno de los elementos almacenadores.

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F - F_R - R_1(v_1 - v_2) - R_2 v_1^2$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = F_R + R_1(v_1 - v_2) - R_2 v_2^2$$

$$\frac{dF_R}{dt} = k(v_1 - v_2)$$

Ejemplo 1.2 .

En la Fig. 1.7 se muestra un sistema mecánico traslacional compuesto por dos masas, m_1 y m_2 , las cuales están unidas a través de una cuerda rígida y a su vez m_2 está unida a una pared a través de un resorte y un amortiguador, cuyos parámetros son k y R_1 , respectivamente. Considere que

existe una fuerza de fricción entre m_2 y la superficie y que el resorte tiene una elongación inicial provocada por la fuerza de la gravedad.

a) Se desea obtener el modelo de este sistema suponiendo que a m_1 se le aplica una fuerza F .

b) Si se considera que la cuerda tiene cierta elasticidad (k_c), indique si el modelo se vería afectado y de que forma.

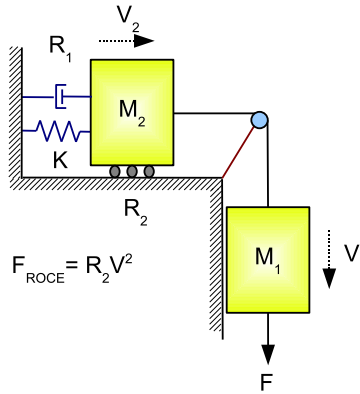


Figura 1.7: Sistema Mecánico

Solución

a) En principio, se resumen a continuación los distintos elementos que componen este sistema, a partir de lo cual se anticipará el número de ecuaciones diferenciales que modelará el sistema y las variables que estarán involucradas.

Fuentes	Fuerza (F)		
Almacenadores	Inercia 1 (v_1)	Inercia 2 (v_2)	Capacitor (F_R)
Resistencias	Amortiguador	Fuerza Roce	

Se tienen tres elementos almacenadores, cuyas variables de estado, v_1 , v_2 y F_R , no son independientes entre sí, pues las velocidades de ambas masas son iguales debido a que la cuerda es inextensible. De allí que el modelo sólo tendrá dos ecuaciones diferenciales de primer grado, una por cada variable de estado independiente. Se hace necesario plantear las ecuaciones diferenciales de todos los elementos almacenadores, tal como se muestra a continuación.

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F - T \tag{1.12}$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = T - F_R - R_1 v_2 - R_2 v_2^2 \tag{1.13}$$

$$\frac{dF_R}{dt} = k v_2 \tag{1.14}$$

En forma general, para sistemas con almacenadores dependientes, es necesario plantear las ecuaciones de todos los almacenadores de energía, pues una de ellas será utilizada para completar la

información requerida por las otras ecuaciones del modelo. En este caso, las Ecs. 1.12 y 1.13 presentan dentro de sus términos la tensión de la cuerda T , la cual no es ni variable de estado ni entrada, por lo tanto no debe formar parte de las ecuaciones finales del modelo. Es por ello que se utiliza una de las ecuaciones antes mencionadas para obtener el valor de T y poder sustituirlo en la otra ecuación. De esta forma se obtiene la Ec. 1.15, la cual, en conjunto con la Ec. 1.14, representarán el comportamiento dinámico del sistema.

$$(m_1 + m_2) \frac{dv_1}{dt} = F - F_R - R_1 v_2 - R_2 v_2^2 \quad (1.15)$$

b) Si la cuerda fuese elástica, sería otro elemento almacenador del tipo capacitor, cuya variable de estado sería la tensión de la cuerda, y a la vez se debería considerar que en este caso las velocidades si serían diferentes. Es por ello que el modelo estaría conformado por cuatro ecuaciones diferenciales, las primeras tres serían las mostradas previamente, 1.12, 1.13 y 1.14, y la cuarta ecuación sería la Ec.1.16, que representa la dinámica del capacitor añadido.

$$\frac{dT}{dt} = k_c (v_1 - v_2) \quad (1.16)$$

1.1.1.2. Sistemas Mecánicos Rotacionales

En esta sección se identificarán cada uno de los elementos que forman parte de los sistemas mecánicos rotacionales según la clasificación mencionada en la sec. 1.1, así mismo, se mostrarán las ecuaciones generales que los describirán.

Fuentes de Energía

Serán consideradas dos diferentes formas de fuentes de energía, aquellas que proporcionan un torque aplicado y las que proporcionan una velocidad angular en algún punto del sistema.

Almacenadores de Energía

Tal como se mencionó anteriormente, para los sistemas mecánicos la energía se almacena en forma de energía cinética y potencial, lo que dará lugar a dos elementos almacenadores de energía que serán descritos a continuación.

Inercia

El primer elemento identificado como almacenador de energía será una masa girando alrededor de un punto, la cual almacena energía en forma de energía cinética. Esquemáticamente es posible representarla como se muestra en la Fig. 1.8, en donde τ es el torque aplicado sobre la masa que gira, j es el valor característico de inercia y ω la velocidad angular a la cual gira. La ecuación de momentum representa matemáticamente a este elemento y se escribe tal como se muestra en la Ec. 1.17, donde H es la cantidad de movimiento angular de la inercia y su derivada corresponde con el torque aplicado sobre la misma. De allí que, derivando la Ec. 1.17, se obtiene la Ec. 1.18 que representará la dinámica del elemento en cuestión.

$$H = j\omega \quad (1.17)$$

$$\frac{dH}{dt} = \tau = \frac{d}{dt}(j\omega) \quad (1.18)$$

Dicha ecuación representa, en forma general, la dinámica del elemento, en la cual se pueden considerar variaciones en el parámetro característico j . Para el caso particular en el cual se considere constante la inercia del elemento, la Ec. 1.18 puede ser reescrita, para ese caso lineal, como,

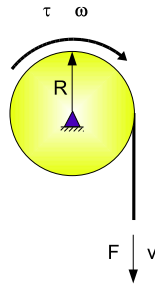


Figura 1.8: Inercia Rotacional

$$\tau = j \frac{d\omega}{dt} \quad (1.19)$$

Finalmente, se definirá a la velocidad angular ω como la variable de estado del elemento, pues, conocida la misma en todo momento, se conocerá la energía cinética almacenada en el elemento.

Capacitor

El otro elemento identificado como almacenador de energía será un resorte torsional, el cual almacena energía en forma de energía potencial. Esquemáticamente puede ser representado como se muestra en la Fig. 1.9.

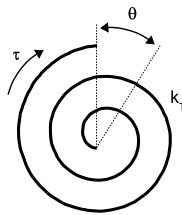


Figura 1.9: Resorte Torsional

donde θ es el desplazamiento relativo entre los extremos, τ es el torque aplicado y k_T es la constante de elasticidad del mismo, la cual puede ser constante o dependiente del valor de θ , siendo en este caso la ecuación que representa el comportamiento de este elemento la siguiente.

$$\tau = k_T \theta \quad (1.20)$$

Derivando la ecuación anterior se obtiene la Ec. 1.21, que describe la dinámica del elemento, en la cual se pueden considerar variaciones en el parámetro característico k_T .

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(k_T \omega) \quad (1.21)$$

Para el caso particular en el cual se considere constante dicho parámetro, la Ec. 1.5 puede ser reescrita, para ese caso lineal, como sigue,

$$\frac{d\tau}{dt} = k_T \frac{d\theta}{dt} = k_T \omega \quad (1.22)$$

Finalmente, se definirá al torque τ como la variable de estado del elemento, pues, conocido el mismo en todo momento, se conocerá la energía potencial almacenada en el elemento. Cabe destacar que en este caso, el desplazamiento angular θ también puede ser considerado como la variable de

estado del elemento, dado que ambas variables guardan una relación entre sí, tal como se observa en la Ec. 1.20

Resistencias

Las pérdidas de energía en este tipo de sistemas son las pérdidas por fricción, por ejemplo, el roce entre dos superficies y el roce o resistencia al viento, entre otras. Este tipo de resistencias, son representadas a través de una relación entre el torque que se produce debido al roce y la velocidad angular relativa entre los cuerpos involucrados en el fenómeno, tal como se muestra en la Ec. 1.23. Esta ecuación puede ser una relación lineal o no lineal dependiendo de cada caso en particular.

$$\tau = f(\omega) \quad (1.23)$$

Transformadores de Energía

En la Fig. 1.10 se muestran un par de engranajes o ruedas que mantienen contacto entre sí y entre los cuales no hay deslizamiento. Allí se aprecia que la primera rueda recibe un torque τ_1 y una velocidad angular ω_1 y la segunda rueda entrega un torque τ_2 y una velocidad angular ω_2 , los cuales estarán asociados a través de las siguientes relaciones de transformación.

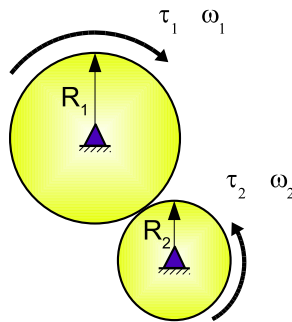


Figura 1.10: Engranajes o Ruedas

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2 \quad (1.24)$$

$$\tau_1 = \frac{R_1}{R_2} \tau_2 \quad (1.25)$$

1.1.2. Sistemas Fluídicos

En esta sección se identificarán cada uno de los elementos que forman parte de los sistemas fluídicos según la clasificación mencionada en la sec. 1.1, así mismo, se mostrarán las ecuaciones generales que los describirán.

Fuentes de Energía

Serán consideradas dos diferentes formas de fuentes de energía, aquellas que proporcionan presión en algún punto del sistema y las que proporcionan caudal.

Almacenadores de Energía

Similar a los sistemas mecánicos antes mencionados, para este tipo de sistemas se tendrán dos elementos capaces de almacenar energía, los cuales serán descritos a continuación.

Inercia

En este caso, el fluido que transita a lo largo de una tubería será considerada como una inercia y las relaciones que representan su dinámica serán semejantes a las mostradas para los casos anteriores. En la Fig. 1.11 se observa un esquema del elemento, en la cual se identifican las variables y parámetros involucrados en el mismo, en la cual q corresponde con el caudal que fluye a lo largo de la tubería, P_1 y P_2 son las presiones en los extremos de la misma, A el área transversal de la tubería, L su longitud y ρ la densidad del fluido.

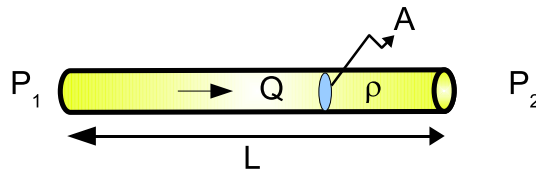


Figura 1.11: Tubería

Se partirá de la misma Ec. 1.1 que se utilizó para los sistemas mecánicos por tratarse de elementos semejantes, en dicha ecuación la masa corresponderá con la masa encerrada en la tubería y la velocidad corresponde con la del fluido circulante, por lo que la relación que representará la dinámica del elemento se obtendrá tal como se muestra a continuación.

$$p = (\text{masa encerrada en la tubería})(\text{velocidad lineal del fluido}) = (\rho AL)v \quad (1.26)$$

Igual que en los casos anteriores, se derivará la Ec. 1.26 para obtener la expresión dinámica buscada, en la cual se sustituirá la fuerza como la presión (P) por el área trasversal de la tubería (A), al igual que la velocidad será sustituida por el caudal entre dicha área, tal como se muestra en la Ec. 1.27.

$$\frac{dp}{dt} = F = \frac{d}{dt}((\rho AL)v)$$

$$F = PA = \frac{d}{dt} \left((\rho AL) \frac{q}{A} \right) \quad (1.27)$$

$$P = \frac{1}{A} \frac{d}{dt} (\rho Lq)$$

Así mismo, si se considera constante la densidad del fluido y la longitud de la tubería, es posible obtener la relación dinámica del elemento para el caso lineal, tal como se muestra en la Ec. 1.28, en la cual la variable de estado será el caudal circulante por la tubería.

$$P = P_1 - P_2 = \left(\frac{\rho L}{A} \right) \frac{dq}{dt} \quad (1.28)$$

Si se compara la Ec. 1.28 con las ecs. 1.3 y 1.19 es posible observar la similitud entre las mismas.

Capacitor

Un tanque, tal como el representado en la Fig. 1.12, será identificado como un elemento capaz de almacenar energía potencial, es decir, un capacitor. En el mismo, A representa el área transversal del mismo, H la altura del fluido contenido, P la presión en el fondo, q_E el caudal de entrada y q_S el caudal de salida. La ecuación que representará su dinámica podrá ser escrita de dos formas tal como se muestra a continuación. Considere la presión en el fondo del tanque como la debida a la columna del agua suponiendo presiones manométricas, tal como se muestra en la Ec. 1.29.

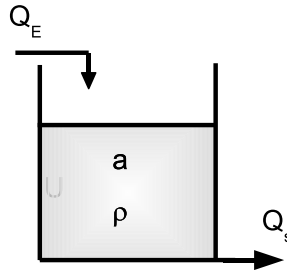


Figura 1.12: Capacitor fluido

$$P = \rho g H \quad (1.29)$$

Derivando dicha ecuación se obtendrá la expresión general para representar la dinámica del elemento en función de la presión en el fondo del tanque (Ec. 1.30), la cual puede ser particularizada al caso lineal si se consideran constantes la densidad y el área obteniéndose la Ec. 1.31. Es importante resaltar que en estas ecuaciones la presión será considerada como la variable de estado del elemento.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho g}{A} V \right) \quad (1.30)$$

$$\left(\frac{A}{\rho g} \right) \frac{dP}{dt} = \frac{dV}{dt} = q_E - q_S \quad (1.31)$$

Si se desea que la altura sea la variable de estado, la ecuación dinámica del elemento podrá ser reescrita tal como se muestra en la Ec. 1.32.

$$A \frac{dH}{dt} = q_E - q_S \quad (1.32)$$

Resistencias

Los elementos que serán reconocidos como disipadores de energía serán aquellos que provocan pérdidas de presión, tales como las pérdidas de presión producidas por la rugosidad en las tuberías o las pérdidas de presión producidas por accesorios. La Ec. 1.33 que describe este tipo de elemento, en forma general, puede ser lineal o no lineal dependiendo del fenómeno que se está representando.

$$\Delta P = f(q) \quad (1.33)$$

Transformadores de Energía

A continuación se mostrarán dos elementos que podrán ser considerados transformadores de energía para este tipo de sistema. En la Fig.1.13 se muestra un pistón, en el cual se transforma la presión y el caudal recibido en una fuerza y una velocidad, o viceversa. Las relaciones que lo representan corresponden con las ecs. 1.34 y 1.35, en donde F representa la fuerza aplicada al pistón, A el área transversal del mismo, v su velocidad de desplazamiento, P la presión transmitida al fluido y q el caudal al cual fluye.

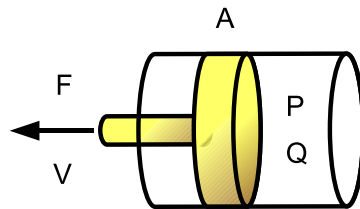


Figura 1.13: Pistón

$$P = \frac{1}{A}F \quad (1.34)$$

$$q = Av \quad (1.35)$$

En la Fig. 1.14 se muestra otro tipo de transformador de energía, para el cual sus relaciones de transformación (ecs. 1.36 y 1.37) se fundamentan en las ecuaciones mostradas previamente.

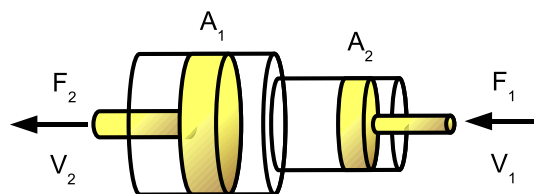


Figura 1.14: Transformador Fluídico

$$F_1 = \frac{A_2}{A_1}F_2 \quad (1.36)$$

$$v_1 = \frac{A_1}{A_2}v_2 \quad (1.37)$$

Ejemplo 1.3 .

A continuación se mostrará un ejercicio sencillo donde se modelará el sistema fluido que se muestra en la Fig. 1.15.

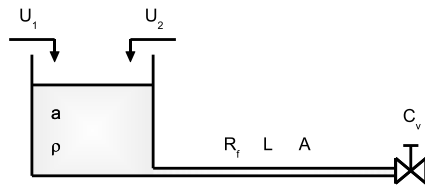


Figura 1.15: Sistema Fluido

Para la realización del mismo se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los valores de los parámetros característicos de los elementos son conocidos, es decir, área del tanque (a), área de la tubería (A), longitud de la tubería (L), resistencia asociada a la fricción en la tubería (R_f) y coeficiente de pérdida en la válvula (C_v).
- Las ecuaciones que representan las pérdidas por fricción y por accesorio son las ecs. 1.40 y 1.41 respectivamente.

$$\Delta P = R_f q^2 \quad (1.38)$$

$$q = C_v \sqrt{\Delta P} \quad (1.39)$$

Solución

Tal como se realizó en el ejercicio anterior se reconocerán los diferentes elementos que conforman el sistema, a partir de lo cual será posible anticipar el número de ecuaciones que tendrá el modelo, así como, las variables que estarán involucradas en él. Dichos elementos se muestran a continuación.

Fuentes	Caudal 1 (q_A)	Caudal 2 (q_B)
Almacenadores	Capacitor (P)	Inercia (q)
Resistencias	Fricción	Válvula

Como se observa, se tienen dos elementos almacenadores de energía cuyas variables de estado, P y q , son independientes entre sí, por lo cual se tendrá un modelo con dos ecuaciones diferenciales de primer orden, que se muestran a continuación.

$$\frac{a}{\rho g} \frac{dP}{dt} = q_A + q_B - q \quad (1.40)$$

$$\frac{\rho L}{A} \frac{dq}{dt} = P - R_f q^2 - \left(\frac{q}{C_v} \right)^2 \quad (1.41)$$

Ejemplo 1.4 .

Se desea desarrollar el modelo matemático de un sistema, similar al del ejercicio anterior, con la diferencia que la tubería se divide en dos tuberías, tal como se muestra en la Fig. 1.16. Considere conocidos todos los parámetros y relaciones de las tuberías añadidas, es decir, se conocen todas las áreas, las longitudes, las resistencias y las relaciones que definen las pérdidas en cada caso. Así mismo, considere que las pérdidas producidas en la bifurcación son despreciables.

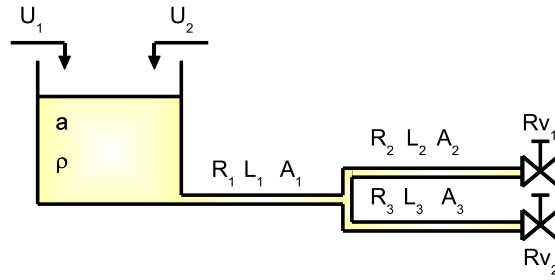


Figura 1.16: Sistema Fluídico

Solución

A continuación se detallan los diferentes elementos que conforman el sistema, a partir de lo cual será posible anticipar el número de ecuaciones que tendrá el modelo, así como, las variables que estarán involucradas en él.

Fuentes	Caudal 1 (q_A)	Caudal 2 (q_B)		
Almacenadores	Capacitor (P)	Inercia 1 (q_1)	Inercia 2 (q_2)	Inercia 3 (q_3)
Resistencias	Fricción	Válvulas		

Como se observa, se tienen cuatro elementos almacenadores de energía cuya variable de estado P es independiente de los caudales, pero q_1 , q_2 y q_3 , tienen una dependencia entre sí, tal como se muestra en la Ec. 1.42.

$$q_1 = q_2 + q_3 \tag{1.42}$$

A partir de dicha expresión es posible conocer un caudal a partir de los otros dos, por lo tanto se concluye que el modelo tendrá únicamente tres ecuaciones diferenciales, una para la presión y dos para los caudales considerados independientes.

Tal como se mencionó anteriormente, para sistemas con almacenadores dependientes, es necesario plantear las ecuaciones de todos los almacenadores de energía, pues una de ellas será utilizada para completar la información requerida por las otras ecuaciones del modelo. En este caso particular, al plantear las ecuaciones de las tuberías, aparece una presión intermedia P_I , la cual no es ni variable de estado ni entrada, por lo cual no debe figurar en las ecuaciones finales del modelo. Si se considera a q_1 como la variable dependiente se utilizará la Ec. 1.44 para sustituir el valor de P_I , en las ecs. 1.45 y 1.46 de forma tal de obtener el modelo final.

$$\frac{a}{\rho g} \frac{dP}{dt} = q_A + q_B - q_1 \tag{1.43}$$

$$\frac{\rho L_1}{A_1} \frac{dq_1}{dt} = P - R_f q_1^2 - P_I \tag{1.44}$$

$$\frac{\rho L_2}{A_2} \frac{dq_2}{dt} = P_I - R_f q_2^2 - \left(\frac{q_2}{C_{v1}} \right)^2 \tag{1.45}$$

$$\frac{\rho L_3}{A_3} \frac{dq_3}{dt} = P_1 - R_f q_3^2 - \left(\frac{q_3}{C_{v2}} \right)^2 \quad (1.46)$$

Despejando P_1 de la Ec. 1.44 y utilizando la Ec. 1.42 para sustituir el valor de q_1 en función de q_2 y q_3 se tiene la siguiente expresión.

$$P_1 = P - R_f (q_2 + q_3)^2 - \frac{\rho L_1}{A_1} \left[\frac{d(q_2 + q_3)}{dt} \right] \quad (1.47)$$

A partir de allí se completarán las ecuaciones 1.45 y 1.46 para obtener las expresiones finales que representarán la dinámica de los caudales q_2 y q_3 quedando el modelo deseado representado por las Ecs. 1.43, 1.48 y 1.49.

$$\left(\frac{\rho L_2}{A_2} + \frac{\rho L_1}{A_1} \right) \frac{dq_2}{dt} = P - R_f (q_2 + q_3)^2 - \frac{\rho L_1}{A_1} \frac{dq_3}{dt} - R_f q_2^2 - \left(\frac{q_2}{C_{v1}} \right)^2 \quad (1.48)$$

$$\left(\frac{\rho L_3}{A_3} + \frac{\rho L_1}{A_1} \right) \frac{dq_3}{dt} = P - R_f (q_2 + q_3)^2 - \frac{\rho L_1}{A_1} \frac{dq_2}{dt} - R_f q_3^2 - \left(\frac{q_3}{C_{v2}} \right)^2 \quad (1.49)$$

1.1.3. Sistemas Eléctricos

En esta sección se identificarán cada uno de los elementos que forman parte de los sistemas eléctricos según la clasificación mencionada en la sec. 1.1, así mismo, se mostrarán las ecuaciones generales que los describirán.

Fuentes de Energía

Serán consideradas dos diferentes formas de fuentes de energía, aquellas que proporcionan un flujo de corriente y las que proporcionan una diferencia de voltaje.

Almacenadores de Energía

Similar a los sistemas antes mencionados, se tendrán dos elementos capaces de almacenar energía, los cuales serán descritos a continuación.

Inercia

Una inductancia eléctrica, cuyo esquema se observa en la Fig. 1.17, será identificada como un elemento capaz de almacenar energía. Su parámetro característico L , conocido como inductancia, será considerado siempre constante, por lo que la expresión que representa su dinámica puede ser escrita tal como se muestra en la Ec. 1.50. En dicha ecuación, la i representa la corriente que circula a lo largo del elemento y es la variable de estado, y V es la caída de potencial entre sus extremos.

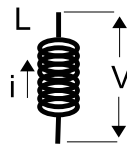


Figura 1.17: Inercia Eléctrica

$$L \frac{di}{dt} = V \quad (1.50)$$

Capacitor

Un condensador o capacitor, cuyo esquema se observa en la Fig. 1.18, será identificado como un elemento capaz de almacenar energía. Su parámetro característico C , conocido como capacitancia, será considerado siempre constante, por lo que la expresión que representa su dinámica puede ser escrita tal como se muestra en la Ec. 1.51, en la cual i representa la corriente que circula a lo largo del elemento y V_C , variable de estado, la caída de potencial entre sus extremos.

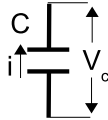


Figura 1.18: Capacitor Eléctrico

$$C \frac{dV_C}{dt} = i \quad (1.51)$$

Resistencias

Son elementos que producen caídas de voltaje y son representados esquemáticamente tal como se muestra en la Fig. 1.19, en la cual R es conocida como la resistencia del elemento, i representa la corriente que circula a lo largo del elemento y V la caída de potencial entre sus extremos. La expresión que representa su comportamiento es la que se muestra en la Ec. 1.52.

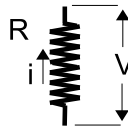


Figura 1.19: Capacitor Eléctrico

$$V = Ri \quad (1.52)$$

Transformadores de Energía

Los transformadores eléctricos, cuyo esquema se muestra en la Fig. 1.20, presentan en uno de sus extremos una corriente y una caída de potencial que son modificadas según las Ecs. 1.53 y 1.54, en las cuales n representa la relación de transformación y depende de los enrollados a cada lado del transformador.

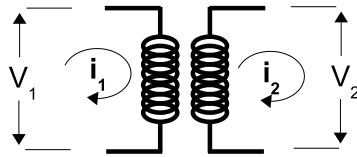


Figura 1.20: Transformador Eléctrico

$$i_1 = ni_2 \quad (1.53)$$

$$V_1 = \frac{1}{n} V_2 \quad (1.54)$$

Para la resolución de problemas asociados a este tipo de sistemas es importante recordar las Leyes de corriente y voltaje de Kirchoff, las cuales señalan lo siguiente.

Ley de corriente (ley de nodos), la suma algebraica de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es cero, o lo que es lo mismo, la suma de las corrientes que entran a una nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

Ley de voltajes (ley de mallas), la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier malla en un circuito eléctrico es cero, o lo que es lo mismo, la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las elevaciones de voltaje alrededor de una malla.

Ejemplo 1.5 .

En la Fig. 1.21 se muestra un circuito clásico RCL, para el cual se consideran conocidos todos los parámetros físicos asociados a dicho sistema y se desea obtener el modelo matemático que represente su dinámica.

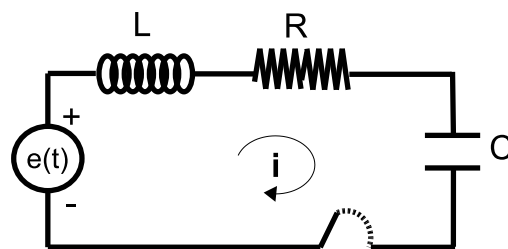


Figura 1.21: Circuito RCL

Solución

Al igual que en ejercicios anteriores se comenzará el desarrollo del modelo identificando los diferentes elementos que forman parte del sistema.

Fuentes	Voltaje (e)	
Almacenadores	Inercia (i)	Capacitor (V_C)
Resistencias	Resistencia	

Teniendo dos elementos almacenadores de energía, cuyas variables de estado son independientes entre sí, se tendrá un modelo formado por dos ecuaciones diferenciales de primer grado.

$$L \frac{di}{dt} = e - V_C - Ri$$

$$C \frac{dV_C}{dt} = i$$

Ejemplo 1.6 .

Para un circuito como el que se muestra en la Fig. 1.22, considere conocidos todos los parámetros físicos asociados a dicho sistema y obtenga el modelo matemático que represente su dinámica.

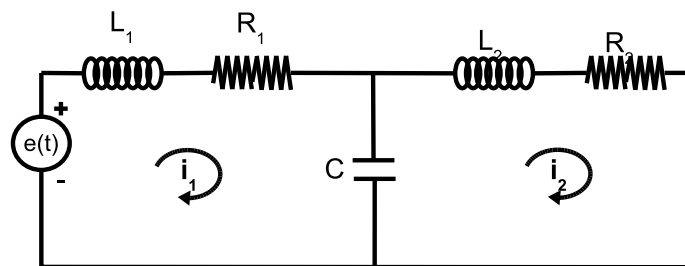


Figura 1.22: Circuito Eléctrico

Solución

Se comenzará el desarrollo del modelo identificando los diferentes elementos que forman parte del sistema, los cuales se muestran a continuación.

Fuentes	Voltaje (e)		
Almacenadores	Inercia 1 (i_1)	Inercia 2 (i_2)	Capacitor (V_C)
Resistencias	Resistencia 1	Resistencia 2	

Teniendo tres elementos almacenadores de energía, cuyas variables de estado, i_1 , i_2 y V_C , son independientes entre sí, se tendrá un modelo formado por tres ecuaciones diferenciales de primer grado.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = e - V_C - R_1 i_1$$

$$C \frac{dV_C}{dt} = i_1 - i_2$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = V_C - R_2 i_2$$

1.1.4. Sistemas Térmicos

En esta sección se identificarán cada uno de los elementos que forman parte de los sistemas térmicos según la clasificación mencionada en la Sec. 1.1, así mismo, se mostrarán las ecuaciones generales que finalmente describirán sus comportamientos. Este tipo de sistemas es diferente a los anteriores pues solamente existe una forma de almacenar energía, en forma de calor, por lo que solo se requiere de un tipo de almacenador de energía.

Fuentes de Energía

Serán consideradas dos diferentes formas de fuentes de energía, aquellas que proporcionan una temperatura en algún punto del sistema y las que proporcionan un flujo de calor.

Almacenadores de Energía

Este tipo de sistema solamente almacena energía en forma de calor, por lo tanto solamente será considerado como elemento almacenador de energía a los capacitores, los cuales representan el fenómeno en cuestión.

Capacitor

En este caso, cualquier elemento capaz de almacenar calor será considerado como un capacitor, por ejemplo, en la Fig. 1.23 se muestra una masa m , que tiene una temperatura T , un calor específico Cp y puede recibir o ceder calor al ambiente.

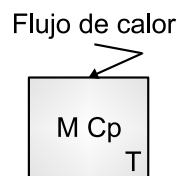


Figura 1.23: Capacitancia Térmica

La Ec. 1.55 representa el calor almacenado en la masa en función de sus parámetros característicos, la cual será derivada para obtener la expresión dinámica general que representará al elemento, tal como se muestra en la Ec. 1.56.

$$\delta mCpT = \delta Q \quad (1.55)$$

$$\frac{d}{dt}(mCpT) = \dot{Q} \quad (1.56)$$

Si se consideran constantes, tanto la masa del elemento como su calor específico, es posible obtener la relación dinámica para el caso lineal, tal como se muestra en la Ec. 1.57. La variable de estado del elemento será la temperatura, la cual define la cantidad de calor almacenada, o lo que es lo mismo la cantidad de energía.

$$mCp \frac{dT}{dt} = \dot{Q} \quad (1.57)$$

Resistencias

Para este tipo de sistemas, los elementos conocidos como resistencias no serán utilizados para representar pérdidas de energía en todos los casos, sino que se utilizarán para representar los diferentes mecanismos de transferencia de calor que ocurren. Si la transferencia de calor ocurre entre

dos elementos de un mismo sistema, no se considerará una pérdida de energía, pero si la transferencia de calor ocurre entre algún elemento de un sistema y el medio ambiente, entonces si se considerará una pérdida pues el calor se está escapando fuera del sistema. Existen tres diferentes mecanismos de transferencia de calor, los cuales se resumen a continuación.

La transferencia de calor por conducción, ocurre entre dos cuerpos sólidos y se representa a través de la Ec. 1.58, en la cual k es conocida como la conductividad térmica del material, A es el área de transferencia de calor, Δx es la distancia que separa los centros térmicos de ambos elementos y ΔT es la diferencia de temperatura entre ambos elementos.

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{kA}{\Delta x}(\Delta T) \quad (1.58)$$

La transferencia de calor por convección, ocurre entre un cuerpo sólido y un fluido o entre dos fluidos y se representa a través de la Ec. 1.59, en la cual h es conocido como coeficiente de convección, A es el área de transferencia de calor y ΔT es la diferencia de temperatura entre ambos elementos.

$$\dot{Q}_{conv} = hA(\Delta T) \quad (1.59)$$

Finalmente, la transferencia de calor por radiación, ocurre entre un cuerpo y un objeto luminoso y se representa a través de la Ec. 1.60, en la cual σ es la constante de Stephan-Boltzmann, ϵ se conoce como emisividad, A_s es el área del elemento emisor y T la temperatura del mismo. Por simplicidad se reúnen todos esos parámetros en uno solo k_R que se conocerá como coeficiente de radiación.

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma \epsilon A_s T^4 = k_R T^4 \quad (1.60)$$

Ejemplo 1.7 .

En la Fig. 1.24 se muestra una representación esquemática de una aleta de enfriamiento para la cual se desea conocer su modelo con fines de diseño. Para ello, se requiere que el modelo en cuestión quede expresado en función de todos los parámetros físicos involucrados, de forma tal que a futuro sea posible modificarlos con miras a lograr un comportamiento específico. Para la realización del modelo se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones.

- *El flujo de calor proveniente de la superficie a enfriar y la temperatura ambiental son conocidos, \dot{Q}_E y T_0 , respectivamente.*
- *Existe una transferencia de calor por conducción entre la superficie y la aleta y entre las distintas porciones de la aleta, la cual se representa por la Ec. 1.61, donde k es la conductividad térmica del material, A es el área de transferencia de calor igual para cada porción, Δx es la distancia entre los centros térmicos y ΔT la diferencia de temperatura entre los elementos asociados a la transferencia.*
- *Existe transferencia de calor por convección entre las distintas porciones de la aleta y el medio, la cual se representa por la Ec. 1.62, donde h_i es el coeficiente de convección de la porción i , a_i es el área de transferencia de calor particular de la porción i y ΔT la diferencia de temperatura entre las porciones y el medio.*
- *Se requiere conocer la variación de la temperatura a lo largo de la aleta.*

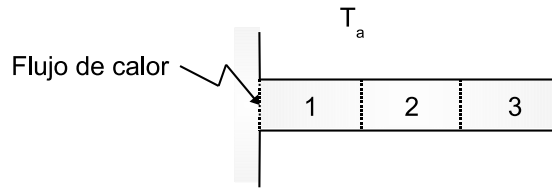


Figura 1.24: Aleta de enfriamiento

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{kA}{\Delta x}(\Delta T) \quad (1.61)$$

$$\dot{Q}_{conv} = h_i a_i (T_i - T_{amb}) \quad (1.62)$$

Solución

A continuación se identificarán los diferentes elementos que forman parte del sistema, con la finalidad de anticipar el número de ecuaciones que tendrá el modelo.

Fuentes	Flujo de Calor (\dot{Q}_E)	Temp. Amb (T_0)	
Almacenadores	Capacitor 1 (T_1)	Capacitor 2 (T_2)	Capacitor 3 (T_3)
Resistencias	Resistencias Convección	Resistencias conducción	

Se tienen tres elementos almacenadores de energía cuyas variables de estado, T_1 , T_2 y T_3 , son independientes, por lo tanto el modelo estará representado por tres ecuaciones diferenciales de primer grado tal como se muestra a continuación.

$$m_1 C_p \frac{dT_1}{dt} = \dot{Q}_E - \frac{kA}{\Delta x} (T_1 - T_2) - h_1 a_1 (T_1 - T_0) \quad (1.63)$$

$$m_2 C_p \frac{dT_2}{dt} = \frac{kA}{\Delta x} (T_1 - T_2) - \frac{kA}{\Delta x} (T_2 - T_3) - h_2 a_2 (T_2 - T_0) \quad (1.64)$$

$$m_3 C_p \frac{dT_3}{dt} = \frac{kA}{\Delta x} (T_2 - T_3) - h_3 a_3 (T_3 - T_0) \quad (1.65)$$

Ejemplo 1.8 .

En el esquema mostrado en la Fig. 1.25 se muestra un tanque abierto de precalentamiento que contiene un líquido de densidad ρ , calor específico C_p , temperatura T_T y área transversal A . Se desea controlar la temperatura del líquido manipulando el voltaje $e(t)$ proporcionado al circuito, para lo cual se requiere el modelo del sistema o proceso.

El circuito está compuesto por una fuente de voltaje e , una inductancia L y una resistencia R , que suministra un flujo de calor al fluido dado por la Ec. 1.66, donde i representa la corriente que circula por el circuito. Para realizar el problema Ud. debe tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

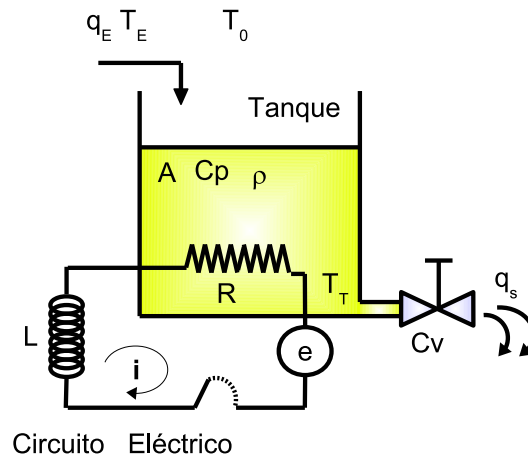


Figura 1.25: Ejercicio Termoeléctrico

- Caudal de entrada igual al de salida y masa contenida en el tanque igual a m .
- La temperatura del caudal de entrada es T_E y la temperatura del caudal de salida es T_T . Ambos deben considerarse como variables en el tiempo.
- La temperatura ambiente T_0 es conocida y puede presentar variaciones en el tiempo.
- La transferencia de calor a través de las paredes del tanque y de la superficie del líquido con el ambiente son por convección y son representadas a través de la Ec. 1.67, donde x y ΔT definen entre quienes ocurre la transferencia.

$$\dot{q} = i^2 R \quad (1.66)$$

$$\dot{q}_x = h_x a_x (\Delta T) \quad (1.67)$$

A partir de dicha información se desea que usted realice lo siguiente:

a) Obtenga el modelo matemático del sistema.

b) Si el caudal de entrada no fuese igual al de salida, diga, de existir, ¿cuáles serían las posibles modificaciones que se deberían plantear al modelo?. Si concluye que existirían cambios, realice el modelo modificado, para lo cual considere que el caudal de salida, q_S vendría definido por la Ec. 1.68, donde C_v es el coeficiente de restricción de la válvula y H es la altura del tanque.

$$q_S = C_v \sqrt{H} \quad (1.68)$$

Solución

a) Se tiene un proceso conformado por diferentes tipos de sistemas, uno eléctrico, uno térmico y otro fluido. El sistema eléctrico es la red eléctrica, en tanto que, los sistemas térmico y fluido están conformados por el fluido contenido en el tanque, el cual es capaz de almacenar energía en forma de energía térmica y potencial.

Lo primero a resaltar es el hecho de que el caudal de entrada y el de salida son iguales, razón por la cual la altura de tanque no presentará ninguna variación, por ello el sistema fluido no formará

parte de la dinámica del proceso. A partir de allí, a continuación se resumen los elementos del sistema que servirán de base para desarrollar el modelo del mismo.

Fuentes	Flujo de Voltaje (e)	Temp. Amb. (T_o)	Temp. Ent. (T_E)	Caudal (q_E)
Almacenadores	Inercia (i)	Capacitor (T_T)		
Resistencias	Resistencia Eléctrica	Resistencias Térmicas		

Como se observa, se tendrán dos variables de estado independientes entre sí, i y T_T , por lo que el modelo estará conformado por dos ecuaciones diferenciales que representarán el comportamiento dinámico del sistema.

$$L \frac{di}{dt} = e - Ri \quad (1.69)$$

$$mC_p \frac{dT_T}{dt} = i^2 R + q_E \rho C_p (T_E - T_T) - h_T a_T (T_T - T_o) - h_S a_S (T_T - T_o) \quad (1.70)$$

b) Si se consideran diferentes los caudales de entrada y de salida se tendrá que la altura en el tanque será variable. Por lo tanto habrá que añadir una ecuación diferencial para la altura, tal como se muestra a continuación.

$$A \frac{dH}{dt} = q_E - C_v \sqrt{H} \quad (1.71)$$

Adicionalmente, se debe modificar la Ec. 1.70 pues la masa encerrada en el tanque varía con la altura, por lo tanto la ecuación que representa las variaciones de T_T debe desarrollarse nuevamente tal como se muestra a continuación, quedando definitivamente expresada por la Ec. 1.72.

$$m = \rho A H$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho A H T_T)}{dt} &= i^2 R + q_E \rho C_p T_E - C_v \sqrt{H} \rho C_p T_T - h_T a_T (T_T - T_o) - h_S a_S (T_T - T_o) \\ \rho A H \frac{dT_T}{dt} + \rho A T_T \frac{dH}{dt} &= i^2 R + q_E \rho C_p T_E - C_v \sqrt{H} \rho C_p T_T - (h_T a_T + h_S a_S) (T_T - T_o) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Tal como se describió anteriormente, es posible desarrollar modelos sencillos para los diferentes tipos de sistemas, lineales o no lineales dependiendo del tipo de relación que se utilice para representar los fenómenos que ocurren.

Debido a que la teoría de control que se estudiará en los siguientes capítulos requiere de modelos lineales para el análisis de los sistemas, se mostrará a continuación un procedimiento para simplificar modelos no lineales y convertirlos en modelos lineales.

1.2. Linealización de Modelos Matemáticos No Lineales

Los modelos matemáticos desarrollados, para distintos tipos de sistemas, pueden ser lineales o no lineales dependiendo de las relaciones que se hayan considerado como válidas al momento de desarrollar las ecuaciones que representen el proceso. En la mayoría de los casos los modelos utilizados para representar uno u otro proceso son no lineales, pues de esa forma son capaces de reproducir mejor el comportamiento real del mismo, de allí que, en caso de requerir un modelo lineal, se hará necesario linealizar sus ecuaciones. Para ello se mostrará a continuación un procedimiento que se fundamenta en el desarrollo de una función no lineal como una Serie de Taylor

alrededor de un punto de operación, dicho procedimiento será inicialmente descrito a través de la linealización de una función sencilla con el objetivo de facilitar la comprensión del mismo.

Suponga que desea linealizar la función representada por la Ec. 1.73, cuya representación gráfica se muestra en la Fig. 1.26, en la cual también se aprecia la función linealizada alrededor del punto $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$.

$$y = x^2 \tag{1.73}$$

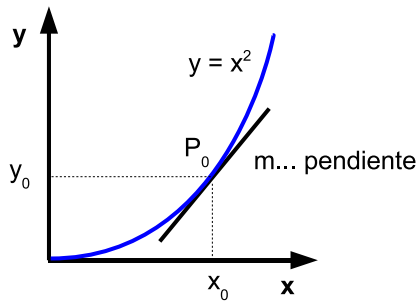


Figura 1.26: Linealización Gráfica de $y = x^2$

Si se observa con cuidado la Fig. 1.26 se aprecia que la función linealizada coincide con una recta tangente a la función en el punto \bar{p} , cuya pendiente m será la derivada de la función evaluada en \bar{p} , tal como se muestra a continuación.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})} = (2\bar{x}) = m \tag{1.74}$$

A partir de allí, una función lineal para y puede ser representada utilizando la recta de pendiente m tal como sigue,

$$y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$$

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

$$y^* = mx^* \tag{1.75}$$

La Ec. 1.75 representa la función lineal que se deseaba encontrar, en la cual las variables asterisco vienen a ser las variaciones de las variables alrededor del punto \bar{p} , o también conocidas como variables de perturbación. Escrita en una forma general, una función no lineal $f(x)$ expandida como una Serie de Taylor quedaría tal y como se muestra en la Ec. 1.76, en donde se despreciará a partir del tercer término de la serie pues contienen potencias de la variable de perturbación que serán muy pequeñas haciendo dichos términos despreciables.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{p}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\bar{p}} (x - \bar{x})^2 + \dots \tag{1.76}$$

1 Representación de Sistemas Físicos

A continuación se muestra, en la Ec. 1.78, como quedaría linealizada una expresión como la mostrada en la Ec. 1.77, la cual depende de tres variables.

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \quad (1.77)$$

$$y = \bar{y} + \left[\frac{df}{dx_1} \Big|_{\bar{p}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \right] (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{df}{dx_2} \Big|_{\bar{p}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \right] (x_2 - \bar{x}_2) + \left[\frac{df}{dx_3} \Big|_{\bar{p}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \right] (x_3 - \bar{x}_3) \quad (1.78)$$

Finalmente, se reescribe esta ecuación tal y como se muestra en la Ec. 1.79, en la cual se observa claramente que cada uno de los términos de la misma son lineales pues las derivadas evaluadas siempre serán constantes.

$$y^* = \frac{df}{dx_1} \Big|_{\bar{p}} x_1^* + \frac{df}{dx_2} \Big|_{\bar{p}} x_2^* + \frac{df}{dx_3} \Big|_{\bar{p}} x_3^* \quad (1.79)$$

Ejemplo 1.9 .

Linealice las ecuaciones de un modelo que se desarrolló anteriormente, es decir, las Ecs. 1.40 y 1.41, para ello considere conocidas las entradas q_1 y q_2 en operación.

Solución

En principio se obtiene el punto de operación que será utilizado en la linealización de las ecuaciones, el cual coincidirá con el punto de equilibrio físico en donde las variables de estado no cambian con el tiempo. Para ello se hacen cero las derivadas de las Ecs. 1.40 y 1.41 y se obtienen los valores de \bar{P} y \bar{q} de las ecs. 1.80 y 1.81.

$$0 = q_1 + q_2 - \bar{q} \Rightarrow \bar{q} = q_1 + q_2 \quad (1.80)$$

$$0 = \bar{P} - R_f (\bar{q})^2 - \left(\frac{\bar{q}}{C_v} \right)^2 \Rightarrow \bar{P} = \left(R_f + \frac{1}{C_v^2} \right) (q_1 + q_2)^2 \quad (1.81)$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo linealizado quedaran tal como se muestran a continuación.

$$\frac{a}{\rho g} \frac{dP^*}{dt} = q_1^* + q_2^* - q^*$$

$$\frac{\rho L}{A} \frac{dq^*}{dt} = P^* - (2\bar{q}R_f) q^* - \left(\frac{2\bar{q}}{C_v} \right) q^*$$

1.3. Función de Transferencia

La función de transferencia es una forma de representación matemática de un sistema físico y está definida como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, para las siguientes condiciones:

- Una sola entrada una sola salida

- Condiciones iniciales nulas
- Independiente de la entrada
- Sistemas lineales
- Parámetros invariantes en el tiempo

En la Fig. 1.27 se muestra la representación gráfica de una función de transferencia $G(s)$, donde $R(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada y $C(s)$ es la transformada de Laplace de la salida.

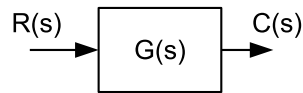


Figura 1.27: Función de Transferencia

En forma general, una función de transferencia puede escribirse tal como se muestra en la Ec. 1.82, en la cual las soluciones del denominador serán conocidas como los ceros del sistema y las soluciones del denominador como los polos del sistema. Además, el grado del polinomio del denominador definirá una clasificación conocida como el orden del sistema, es decir, un polinomio de grado n definirá al sistema como de n -ésimo orden.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (1.82)$$

Tal como se mencionó anteriormente, una función de transferencia es una representación matemática de un sistema, o lo que es lo mismo, es un modelo de un sistema, la cual tiene ciertas características que a continuación se resaltan.

- Es una representación del sistema independiente de la entrada a la cual se vea sometido.
- Si se conoce la función de transferencia de un sistema, será posible estudiar el comportamiento del mismo ante diferentes tipos de entrada.
- Si la función de transferencia es numérica, no proporcionará ninguna información respecto a las interrelaciones físicas del sistema que representa, tanto es así que es posible que sistemas de diferente índole tengan exactamente la misma función de transferencia.
- Si la función de transferencia es paramétrica, se podría utilizar a la misma para analizar la sensibilidad del sistema ante variaciones en sus parámetros.

Cabe destacar que, para un sistema con n variables y m entradas será posible obtener $n \times m$ funciones de transferencia que representen las variaciones de cada una de las salidas respecto a cada una de las entradas.

Gracias a que se trata de sistemas lineales, se puede utilizar el principio de superposición para conocer el comportamiento de la salida de un sistema ante variaciones en diferentes entradas. Más específicamente, si se tiene un sistema cuya salida $C(s)$ depende de las entradas $R(s)$ y $P(s)$, la misma podrá expresarse tal como se muestra en la Ec. 1.83.

$$C(s) = G_R(s)R(s) + G_P(s)P(s) \quad (1.83)$$

Dicha expresión será conocida como la relación de transferencia de $C(s)$, en la cual $G_R(s)$ y $G_P(s)$ serán las funciones de transferencia entre la variable de salida y cada una de las entradas respectivamente.

A continuación se mostrarán algunos ejercicios, en los cuales se obtiene la función de transferencia de un sistema a partir de su modelo en ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1.10 .

Para el sistema termoeléctrico representado por las Ecs. 1.69 y 1.70, se desea implantar un esquema de control de retroalimentación simple, para lo cual se necesita conocer las siguientes funciones de transferencia: entre la variable controlada (T_T) y la variable manipulada (E), y entre la variable controlada y las posibles perturbaciones. Suponga conocidas las funciones de transferencia del medidor de temperatura, $G_m(s)$, del controlador, $G_c(s)$, y del actuador, $G_a(s)$.

Solución

Como el sistema de ecuaciones que modelan dicho proceso son no lineales, se deben linealizar las mismas si se desea obtener la función de transferencia solicitada. Para ello se debe obtener el punto de operación (\bar{i} y \bar{T}_T) resolviendo las Ecs. 1.84 y 1.85 que se muestran a continuación.

$$0 = \bar{e} - R\bar{i} \quad (1.84)$$

$$0 = (\bar{i})^2 R + \bar{q}_E \rho C_p (\bar{T}_E - \bar{T}_T) - h_T a_T (\bar{T}_T - T_o) - h_S a_S (\bar{T}_T - \bar{T}_o) \quad (1.85)$$

Las ecuaciones del modelo ya linealizadas serían las siguientes, suponiendo que todas las entradas son variables, a excepción de la T_o que se considera constante.

$$L \frac{di^*}{dt} = e^* - Ri^*$$

$$mC_p \frac{dT_T^*}{dt} = (2\bar{i}R) i^* + \rho C_p (\bar{T}_E - \bar{T}_T) q_E^* + \bar{q}_E \rho C_p (T_E^* - T_T^*) - (h_T a_T + h_S a_S) T_T^*$$

Se toma la transformada de Laplace a ambas ecuaciones considerando que las funciones de transferencia están definidas para condiciones iniciales nulas, por lo que las mismas quedarán como se muestran a continuación, en las cuales se simplificaron los asteriscos en el entendido que se trata de variables de perturbación.

$$LsI(s) = E(s) - RI(s) \quad (1.86)$$

$$mC_p s T_T(s) = (2\bar{i}R) I(s) + \rho C_p (\bar{T}_E - \bar{T}_T) q_E(s) + \bar{q}_E \rho C_p (T_E(s) - T_T(s)) - \dots \\ \dots - (h_T a_T + h_S a_S) T_T(s) \quad (1.87)$$

Como se observa la temperatura ambiental (T_o) no figura en las ecuaciones debido a que, siendo constante, su variación respecto al equilibrio es cero. Para obtener las relaciones requeridas se deben hacer cero todas las entradas diferentes a la que será considerada la variable de entrada en cada caso en particular. De esa forma, se obtiene la función de transferencia, entre la variable controlada $T_T(s)$ y la manipulada $E(s)$, desarrollando las dos ecuaciones tal como se muestra.

$$(Ls + R) I(s) = E(s) \quad (1.88)$$

$$(mC_p s + \bar{q}_E \rho C_p + h_T a_T + h_S a_S) T_T(s) = (2\bar{i}R) I(s) \quad (1.89)$$

sustituyendo la Ec. 1.88 en la Ec. 1.89 se obtiene la función de transferencia entre $T_T(s)$ y $E(s)$, tal como se muestra en la Ec. 1.91.

$$\frac{T_T(s)}{E(s)} = \frac{2\bar{i}R}{(Ls + R)(mCps + \bar{q}_E\rho Cp + h_Ta_T + h_Sa_S)} \quad (1.90)$$

$$\frac{T_T(s)}{E(s)} = G_E(s) = \frac{2\bar{i}R}{mCpLs^2 + (L(\bar{q}_E\rho Cp + h_Ta_T + h_Sa_S) + RmCp)s + \dots} \quad (1.91)$$

$$\dots + R(\bar{q}_E\rho Cp + h_Ta_T + h_Sa_S)$$

Cabe destacar que la función de transferencia presenta un polinomio en el denominador de segundo grado, lo que indica que el sistema es de segundo orden, lo cual era de esperarse pues el número de variables de estado que tiene el modelo es igual a dos.

Ahora, considerando que las perturbaciones presentes serán las posibles variaciones de $q_E(s)$ y de $T_E(s)$ se obtienen las funciones de transferencia entre la variable controlada y cada una de estas perturbaciones siguiendo un procedimiento semejante al mostrado anteriormente, es decir, para obtener la función de transferencia entre $T_T(s)$ y $q_E(s)$ se deben anular $E(s)$ y $T_E(s)$. Semejante procedimiento se utilizará para obtener la otra función de transferencia requerida.

$$\frac{T_T(s)}{q_E(s)} = G_{q_E}(s) = \frac{\rho Cp(\bar{T}_E - \bar{T}_T)}{mCps + (\bar{q}_E\rho Cp + h_Ta_T + h_Sa_S)}$$

$$\frac{T_T(s)}{T_E(s)} = G_{T_E}(s) = \frac{\bar{q}_E\rho Cp}{mCps + (\bar{q}_E\rho Cp + h_Ta_T + h_Sa_S)}$$

Conocidas dichas funciones es posible presentar en la Fig. 1.28 el diagrama de bloques del esquema de control, en el cual se aprecian los distintos elementos que tiene el esquema planteado, así como, las posibles perturbaciones al proceso.

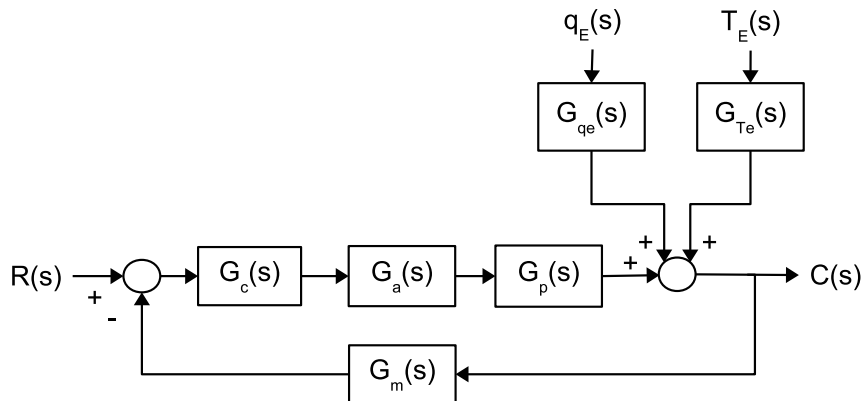


Figura 1.28: Esquema de control

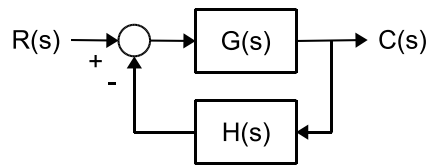


Figura 1.29: Esquema de Alimentación Simple

En el estudio de los sistemas de control es común utilizar los términos, lazo abierto, lazo directo y lazo cerrado, los cuales se refieren a una función de transferencia específica, que se definen, para un sistema como el mostrado en la Fig. 1.29, tal como sigue.

Función de Transferencia a Lazo Abierto

$$G_{LA}(s) = G(s)H(s)$$

Función de Transferencia a Lazo Directo

$$G_{LD}(s) = G(s)$$

Función de Transferencia a Lazo Cerrado

$$G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Esta última función se obtiene a partir de la reducción del diagrama de bloques presentado en la Fig. 1.29, lo cual será estudiado en la próxima sección.

1.4. Diagramas de Bloques

Los diagramas de bloques vienen a ser otra forma de representación de sistemas, la cual se realiza a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo. Está formado por un conjunto de pequeñas funciones de transferencia que representan cada una de las interrelaciones que se suceden dentro del sistema. En otras palabras, un diagrama de bloques es una representación esquemática de las ecuaciones que describen un sistema.

Debido a que está conformado por funciones de transferencia, debe respetar cada una de las consideraciones que fueron planteadas en la Sec. 1.3 para la definición de las mismas.

Al momento de representar las relaciones entre las entradas y salidas de un sistema, los diagramas de bloques presentan ciertas ventajas sobre las funciones de transferencia, dentro de las cuales se destacan las siguientes,

- Se mantienen visibles cada una de las entradas y salidas de un sistema, en tanto que una función de transferencia está particularizada para una sola entrada y una sola salida.
- Permite obtener cualquier función de transferencia particular, por reducción del mismo.
- Muestra las interrelaciones entre los distintos elementos físicos del sistema.

A continuación se mostrarán algunos ejercicios que faciliten una mejor comprensión de los diagramas de bloques y su tratamiento.

Ejemplo 1.11 .

Obtenga el diagrama de bloques del sistema representado a partir de las ecs. 1.86 y 1.87.

Solución

Tal como se mencionó anteriormente, un diagrama de bloques es la representación esquemática de las ecuaciones que describen el sistema, es por ello que en este primer ejercicio se obtendrá el diagrama solicitado ecuación por ecuación para luego conformar el diagrama completo. En las Figs. 1.30 y 1.31 se muestran las representación de las Ecs. 1.86 y 1.87 respectivamente, para finalmente mostrar el diagrama completo en la Fig. 1.32.

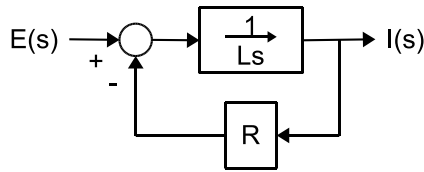


Figura 1.30: Primera ecuación

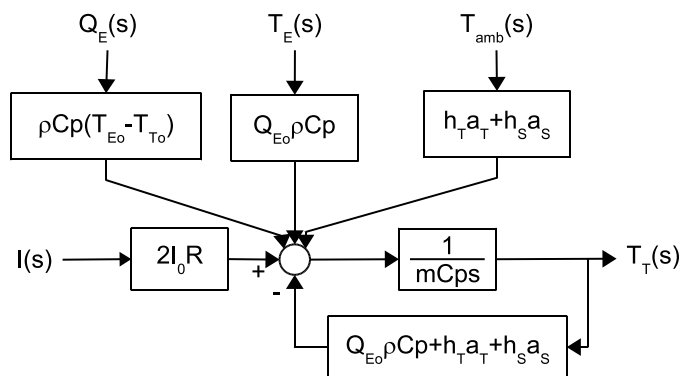


Figura 1.31: Segunda ecuación

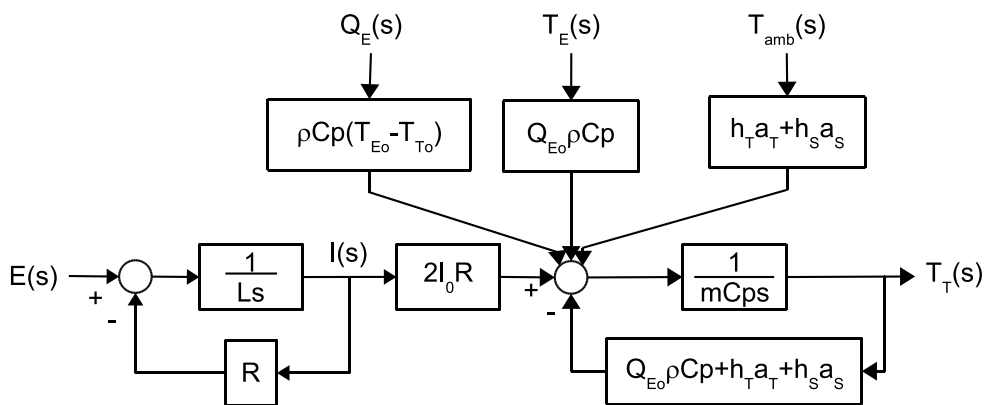


Figura 1.32: Diagrama de Bloques completo

Un diagrama de bloques puede ser reducido con miras a conocer una función de transferencia específica, lo cual se realiza por partes y se fundamenta en la simplificación de los bloques paso a paso. A manera de ejemplo, en el siguiente ejercicio, se muestra la reducción de un diagrama específico.

Ejemplo 1.12 .

Obtenga, a partir del diagrama de bloques del ejercicio anterior, que se muestra en la Fig. 1.32 la función de transferencia entre $T_T(s)$ y $E(s)$.

Solución

Para obtener la función de transferencia requerida, en donde la entrada es $E(s)$, lo primero que se debe hacer es anular todas las demás entradas y posteriormente, se suman las dos retroalimentaciones del segundo lazo y agruparse en una sola función de transferencia pues tienen la misma entrada y la misma salida. Esta primera reducción se observa en la Fig. 1.33.

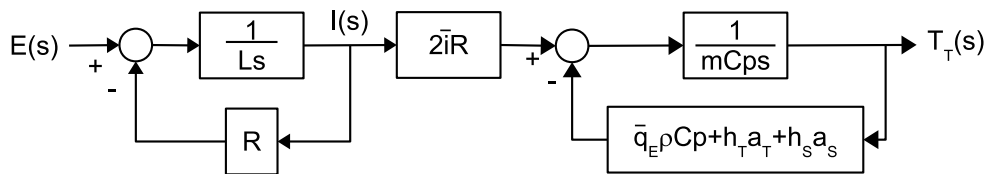


Figura 1.33: Primera Reducción

A partir de este nuevo diagrama se observa que es posible reducir los dos lazos presentes de forma tal que queden convertidos en una sola función de transferencia cada uno, tal como se observa en la Fig. 1.34.

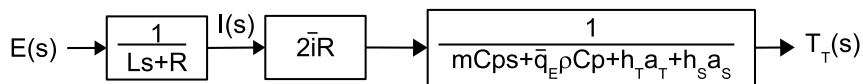


Figura 1.34: Segunda Reducción

Finalmente, la función de transferencia solicitada se obtiene multiplicando cada una de los bloques del diagrama anterior, tal como se muestra en la Fig. 1.35, la cual por supuesto coincide con la previamente obtenida (Ec. 1.90)

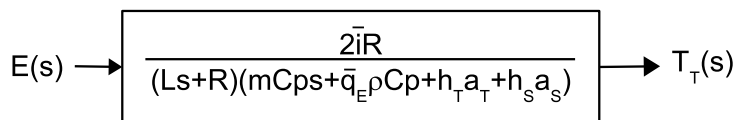


Figura 1.35: Función de transferencia

Adicionalmente al uso de los diagramas de bloques para representar un sistema y obtener sus funciones de transferencia, también se utilizan los conocidos diagramas de flujo de señal, cuyo uso será detallado en la próxima sección.

1.5. Diagramas de Flujo de Señal

Un diagrama de flujo de señal es, al igual que un diagrama de bloques, una representación gráfica de las ecuaciones lineales que representan un sistema. Los elementos básicos que presentan este tipo de diagramas se enumeran a continuación.

- **Nodos:** se utilizan para expresar variables, bien sean variables de entrada, de salida o variables de estado.
- **Ramas:** son segmentos lineales que tienen ganancias y direcciones asociadas. La señal se transmite a través de una rama solamente en la dirección de la flecha.
- **Nodo de entrada (fuente):** es un nodo que se utiliza para representar una entrada y solamente tiene ramas de salida.
- **Nodo de salida (pozo):** es un nodo que se utiliza para representar una salida y solamente tiene ramas de entrada.
- **Trayectoria:** es una sucesión continua de ramas que se dirigen en la misma dirección.
- **Trayectoria directa o camino:** es una trayectoria que empieza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida, a lo largo de la cual ningún nodo se atraviesa más de una vez.
- **Lazo:** es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo y en donde ningún otro nodo se atraviesa más de una vez.
- **Ganancia de la trayectoria:** es el producto de las ganancias de las ramas de una trayectoria.
- **Lazos disjuntos:** son lazos que no comparten ningún nodo.

El diagrama de flujo se desarrolla a partir de las ecuaciones de la misma forma que se hace para los diagramas de bloques, pero a diferencia de éstos, la obtención de una función de transferencia en particular se realiza utilizando la Fórmula de Ganancia de Mason, la cual se muestra en la Ec. 1.92.

$$G(s) = \frac{\text{Salida}(s)}{\text{Entrada}(s)} = \sum_{K=1}^N \frac{M_K \Delta_K}{\Delta} \quad (1.92)$$

en donde,

$\text{Entrada}(s)$ = Variable del nodo de entrada

$\text{Salida}(s)$ = Variable del nodo de salida

$G(s)$ = Ganancia entre la salida y la entrada (función de transferencia)

N = Número total de trayectorias directas o caminos entre la salida y la entrada

M_K = Ganancia de la trayectoria directa k -ésima entre la entrada y la salida

$\Delta = 1 - (\sum \text{ganancias de todos los lazos}) + (\sum \text{productos de las ganancias de todas las combinaciones de dos lazos disjuntos}) - (\sum \text{productos de las ganancias de todas las combinaciones de tres lazos disjuntos}) + \dots$

$\Delta_K = \Delta$ pero eliminando todos los lazos que compartan algún nodo con la k -ésima trayectoria directa.

Ejemplo 1.13 .

Para un proceso cuyo diagrama de flujo de señal es el que se muestra en la Fig. 1.36, encuentre la función de transferencia entre $C(s)$ y $R(s)$.

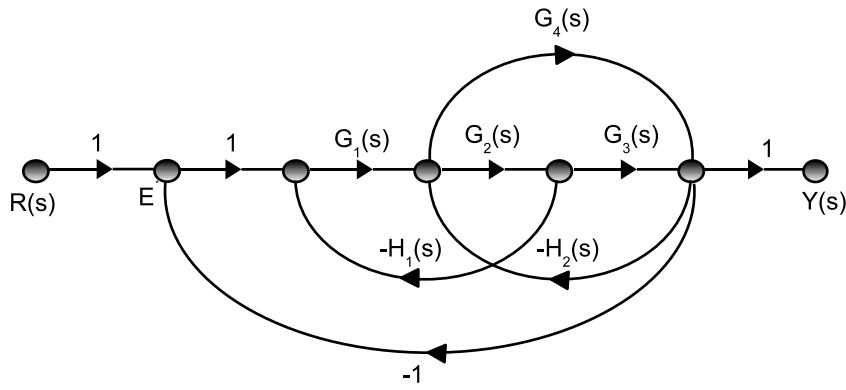


Figura 1.36: Diagrama de Flujo de Señal

Solución

A partir del diagrama se identifican sus lazos del mismo para calcular el determinante general y posteriormente encontrar las trayectorias directas entre $C(s)$ y $R(s)$ y sus determinantes particulares, de forma tal que se obtenga la función de transferencia requerida aplicando la fórmula de Mason.

$$L_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)(-1) \quad L_2 = G_1(s)G_2(s)(-H_1(s)) \quad L_3 = G_2(s)G_3(s)(-H_2(s))$$

$$L_4 = G_4(s)(-H_2(s)) \quad L_5 = G_1(s)G_4(s)(-1)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

$$M_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \quad M_2 = G_1(s)G_4(s)$$

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta}$$

1.6. Representación en Variables de Estado

La representación en variables de estado de un proceso es sumamente útil cuando se trata de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, los cuales resultan complicados de tratar bajo el concepto de función de transferencia, una sola entrada-una sola salida. De allí que, en esta sección se realizará una breve introducción a la representación en variables de estado de un sistema y a su utilidad. Cabe destacar que una representación de estado solamente es posible para sistemas lineales y se expresa en forma general tal como de muestra a continuación para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, en donde las variables de estado del sistema son las $x(t)$, las entradas $u(t)$ y las posibles salidas $y(t)$.

Ecuaciones diferenciales que expresan el modelo del sistema

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

Relaciones que expresan las salidas en función de las variables del sistema

$$y_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

$$\vdots$$

$$y_m(t) = g_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)$$

Lo anterior es expresado en forma matricial como se muestra a continuación, en donde las matrices A , B , C y D dependerán de las funciones f y g que determinan el modelo del sistema.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

1.6.1. Representación a partir de las ecuaciones diferenciales

Para los siguientes ejemplos se disponen de las ecuaciones diferenciales que describen diferentes procesos y se requiere que las mismas se expresen a través de su representación de estado.

1) Cuando las ecuaciones del modelo son todas de primer orden y lineales

$$\dot{x}_1(t) = x_2 \quad \dot{x}_2(t) = -K_2x_1(t) - K_1x_2(t) + u_1(t) + K_3u_2(t) \quad \dot{x}_3(t) = -K_5x_2(t) - K_4x_3(t) + K_6u_1(t)$$

A partir de allí se obtiene directamente la representación de estado en funciones de las matrices características tal como se muestra.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K_2 & -K_1 & 0 \\ 0 & -K_5 & -K_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & K_3 \\ K_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

2) Cuando las ecuaciones del modelo no son todas de primer orden pero si son lineales.

$$m_1\ddot{y}_1(t) = u_1(t) - b_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) - k_1y_1(t)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) = u_2(t) + b_1 (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) - k_2 y_2(t)$$

Como existen derivadas de segundo orden se deben definir algunas variables auxiliares, de forma tal que el modelo pueda representarse en variables de estado.

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}_1(t)$$

$$x_3(t) = y_2(t)$$

$$x_4(t) = \dot{y}_2(t)$$

A partir de allí las ecuaciones del modelo se expresan como sigue,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{m_1} [b_1 (x_2(t) - x_4(t)) + k_1 x_1(t)] + \frac{1}{m_1} u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{1}{m_2} [b_1 (x_2(t) - x_4(t)) + k_2 x_3(t)] + \frac{1}{m_2} u_2(t)$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

1.6.2. Representación a partir de la función de transferencia

Existen diversas técnicas para obtener una representación de estado a partir de la función de transferencia del sistema, lo que resulta sumamente útil cuando se desea diseñar sistemas de control partiendo de sus estados. A continuación se presentan las representaciones de estado en forma canónica controlable y observable, dada la utilidad de las mismas.

Considere un sistema definido por la función de transferencia que se muestra en la Ec. 1.93, donde $y(t)$ representa la salida y $u(t)$ la salida,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (1.93)$$

La forma canónica controlable, que es sumamente importante cuando se analiza el método de asignación de polos para un sistema de control, se muestra a continuación,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 & \vdots & b_{n-1} - a_{n-1}b_0 & \vdots & \dots & \vdots & b_1a_1 - b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0u(t)$$

La forma canónica observable se obtiene planteando las siguientes ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1a_1 - b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0u(t)$$

1.7. Problemas Resueltos

Problema resuelto 1.1 .

En la Fig. 1.37 se muestra un proceso de distribución de agua para el cual se desea desarrollar su modelo matemático y plantear alternativas de control. Para la realización del mismo se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones.

- El fluido que circula tiene una densidad ρ constante.
- Las válvulas tienen una pérdida proporcional al caudal que circula por ellas, que se representa como $\Delta P_i = R_i q_i$, donde R_i es el parámetro característico de la válvula e i se refiere al caudal circulante por la válvula i .
- La única tubería cuya longitud debe considerarse como apreciable (L) es la que se encuentra luego de la bomba, cuya área se considera conocida (A_T).
- La caída de presión por fricción en la tubería antes señalada se rige por la siguiente relación, $\Delta P = R_4 q^2$.
- La bomba suministra, en el punto en que se encuentra, una presión externa conocida como P_B .
- No consideré ningún efecto producido por la gravedad.

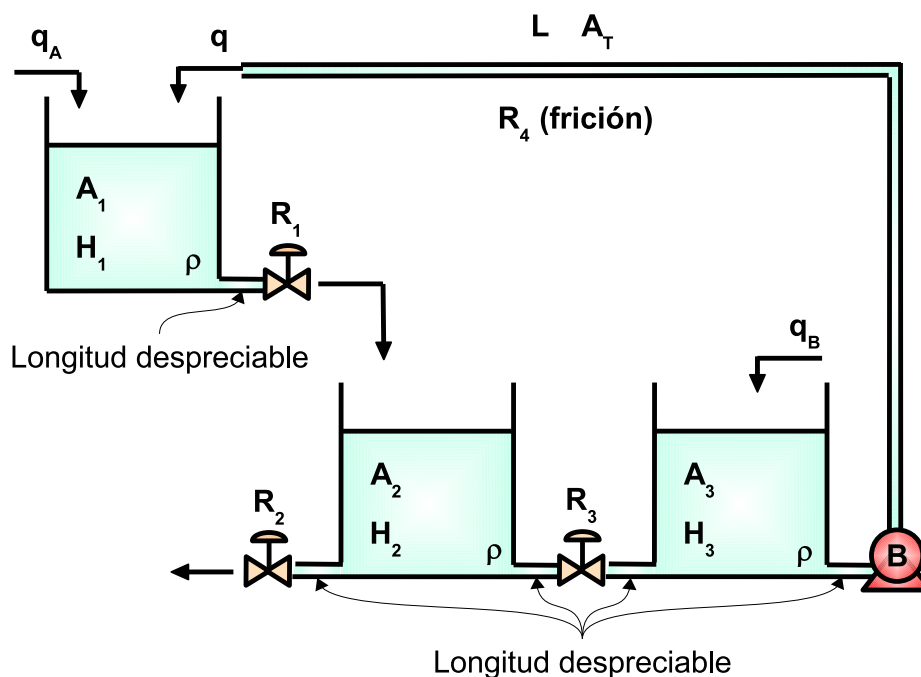


Figura 1.37: Sistema de Distribución de Agua

Se solicita que realice lo siguiente, de forma tal que se desarrolle la estrategia de control propuesta.

- Modelo matemático del proceso en ecuaciones diferenciales.
- Linealización del modelo, en caso de ser necesario.
- Dibuje sobre el diagrama del proceso, mostrado en la Fig. 1.37, un esquema de control de retroalimentación simple para controlar la altura del primer tanque, manipulando la presión suministrada por la bomba. Añada en dicho esquema los instrumentos necesarios para implantarlo e identifique la variable controlada, la manipulada, la medida y las posibles perturbaciones.
- Finalmente, si se considerara la densidad como variable, indique si el modelo realizado presentaría alguna modificación. Razone su respuesta.

Solución

- Para la realización del modelo matemático del proceso en ecuaciones diferenciales se destacan a continuación los elementos del mismo.

Fuentes	Caudal (q_A)	Caudal (q_B)	Presión bomba (P_B)	
Almacenadores	Tanque 1 (P_1)	Tanque 2 (P_2)	Tanque 3 (P_3)	Tubería (q)
Resistencias	3 Válvulas	Fricción tubería		

Como se observa se tienen cuatro almacenadores cuyas variables de estado son independientes entre sí por lo que se tendrán cuatro ecuaciones diferenciales para representar el comportamiento dinámico del proceso.

Primer tanque

$$\left(\frac{A_1}{\rho g}\right) \frac{dP_1}{dt} = q_A + q - \frac{P_1}{R_1}$$

Segundo tanque

$$\left(\frac{A_2}{\rho g}\right) \frac{dP_2}{dt} = \frac{P_1}{R_1} - \frac{(P_2 - P_3)}{R_3} - \frac{P_2}{R_2}$$

Tercer tanque

$$\left(\frac{A_3}{\rho g}\right) \frac{dP_3}{dt} = q_B + \frac{(P_2 - P_3)}{R_3} - q$$

Tubería

$$\left(\frac{\rho L}{A_T}\right) \frac{dq}{dt} = P_3 + P_B - R_4 q^2$$

El conjunto de ecuaciones obtenidas contiene términos no lineales, por lo que se dice que el modelo desarrollado es no lineal.

b) Lo primero que se hace para linealizar las ecuaciones es obtener el punto de equilibrio haciendo cero las variaciones de las variables de estado, de forma tal que se tienen un conjunto de cuatro ecuaciones en las cuales las incógnitas serán las cuatro variables de estado en el punto de operación o equilibrio.

$$0 = \bar{q}_A + \bar{q} - \frac{\bar{P}_1}{R_1}$$

$$0 = \frac{\bar{P}_1}{R_1} - \frac{(\bar{P}_2 - \bar{P}_3)}{R_3} - \frac{\bar{P}_2}{R_2}$$

$$0 = \bar{q}_B + \frac{(\bar{P}_2 - \bar{P}_3)}{R_3} - q$$

$$0 = \bar{P}_3 + \bar{P}_B - R_4 \bar{q}^2$$

Conocido el equilibrio se muestran a continuación las ecuaciones linealizadas en las cuales las variables son variables de perturbación.

$$\left(\frac{A_1}{\rho g}\right) \frac{dP_1^*}{dt} = q_A^* + q^* - \frac{P_1^*}{R_1} \quad (1.94)$$

$$\left(\frac{A_2}{\rho g}\right) \frac{dP_2^*}{dt} = \frac{P_1^*}{R_1} - \frac{(P_2^* - P_3^*)}{R_3} - \frac{P_2^*}{R_2} \quad (1.95)$$

$$\left(\frac{A_3}{\rho g}\right) \frac{dP_3^*}{dt} = q_B^* + \frac{(P_2^* - P_3^*)}{R_3} - q^* \quad (1.96)$$

$$\left(\frac{\rho L}{A_T}\right) \frac{dq^*}{dt} = P_3^* + P_B^* - (2R_4\bar{q}) q^* \quad (1.97)$$

c) El esquema de control de retroalimentación simple se muestra en la Fig. 1.38, en el cual la variable controlada y la medida es la altura del primer tanque, la manipulada es la presión suministrada por la bomba y las perturbaciones son los caudales de entrada q_A y q_B .

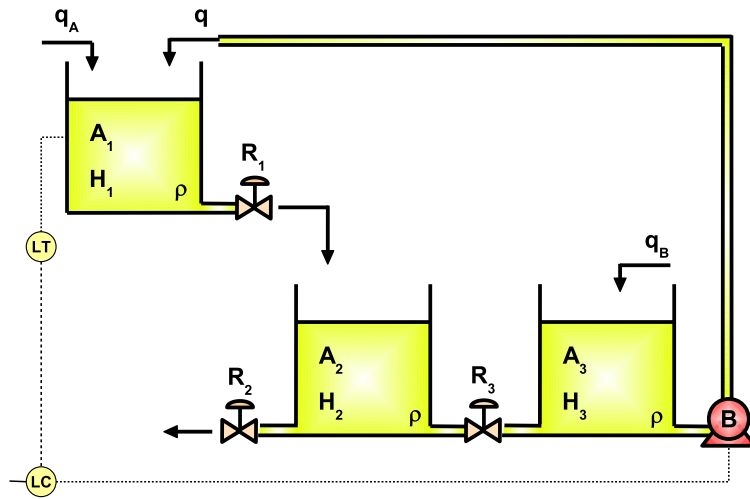


Figura 1.38: Esquema de Control (Distribución de Agua)

d) Si la densidad fuese variable el número de ecuaciones seguiría siendo el mismo pero su no linealidad sería mayor pues en las derivadas no se podría extraer la densidad de las mismas y en la linealización debería considerarse.

Problema resuelto 1.2 .

En la Fig. 1.39 se muestra el esquema de un intercambiador de calor a través del cual circula un fluido cuya temperatura T se debe controlar manipulando el fluido que circula por la camisa q_C .

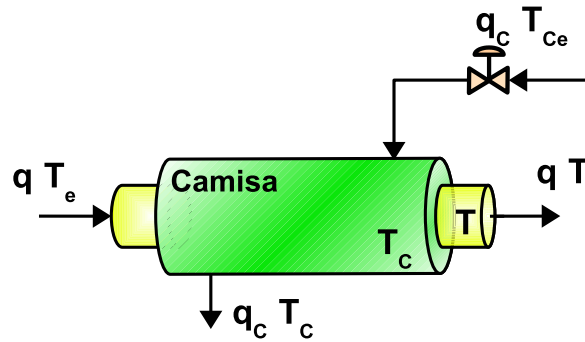


Figura 1.39: Intercambiador de Calor

Para poder realizar un análisis completo del esquema de control es necesario completar los siguientes pasos:

a) Desarrollar el modelo del proceso en función de los parámetros físicos del mismo, para lo cual debe tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Temperaturas uniformes, tanto en el interior del intercambiador como en la camisa.
- La masa encerrada en el intercambiador es conocida como m y dentro de la camisa como m_c .
- La densidad es igual para ambos fluidos y también su calor específico, ρ y C_p . Así mismo, el valor de ambos se considera igual a uno.
- La transferencia de calor ocurre por convección y se supone que sigue la relación que se muestra en la Ec. 1.98, donde ha es conocido.

$$\dot{Q}_{conv} = ha(\Delta T) \quad (1.98)$$

- Los valores en equilibrio para cada una de las entradas se suponen conocidos, es decir, \bar{q} , \bar{T}_e , \bar{q}_c y \bar{T}_{ce} .
- No hay transferencia de calor hacia el medio.

b) A partir del modelo del proceso se debe obtener la función de transferencia entre la variable controlada y la manipulada.

Solución

a) El modelo estará conformado por las dos ecuaciones que representan los balances de energía en el intercambiador, en las cuales las variables de estado corresponderán a las temperaturas T y T_c . A continuación se destacan los elementos del sistema y las ecuaciones que lo representan.

Fuentes	Caudal (q)	Caudal (q_c)	Temperatura (T_e)	Temperatura (T_{ce})
Almacenadores	Capacitor (T)	Capacitor (T_c)		
Resistencias	Convección			

Como se observa se tienen dos almacenadores cuyas variables de estado son independientes entre sí por lo que se tendrán dos ecuaciones diferenciales para representar el comportamiento dinámico del proceso.

$$mC_p \frac{dT}{dt} = \rho q C_p (T_e - T) - ha(T - T_c)$$

$$m_c C_p \frac{dT_c}{dt} = \rho q_c C_p (T_{ce} - T_c) + ha(T - T_c)$$

b) Como estas ecuaciones son no lineales se deben linealizar para poder obtener la función de transferencia requerida. Para lo cual lo primero que debe obtenerse es el punto de operación o de equilibrio de las variables de estado.

$$0 = \rho \bar{q} C_p (\bar{T}_e - \bar{T}) - ha (\bar{T} - \bar{T}_c)$$

$$0 = \rho \bar{q}_c C_p (\bar{T}_{c_e} - \bar{T}_c) + ha (\bar{T} - \bar{T}_c)$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen los valores para \bar{T} y \bar{T}_c en función de los parámetros del proceso y de los valores conocidos de las entradas. Determinado el punto de operación, se procede a linealizar las ecuaciones tal como se muestra.

$$m C_p \frac{dT^*}{dt} = \rho \bar{q} C_p (T_e^* - T^*) + \rho C_p (\bar{T}_e - \bar{T}) q^* - ha (T^* - T_c^*) \quad (1.99)$$

$$m_c C_p \frac{dT_c^*}{dt} = \rho \bar{q}_c C_p (T_{c_e}^* - T_c^*) + \rho C_p (\bar{T}_{c_e} - \bar{T}_c) q_c^* + ha (T^* - T_c^*) \quad (1.100)$$

Las Ecs. 1.99 y 1.100 representan el modelo lineal del proceso, el cual solamente es válido para pequeñas variaciones alrededor del equilibrio pues todas las variables involucradas son variables de perturbación. A partir de dichas ecuaciones se toma la transformada de Laplace a las mismas y se reagrupan sus términos tal como sigue.

$$(m C_p s + \rho \bar{q} C_p + ha) T(s) = \rho \bar{q} C_p T_e(s) + \rho C_p (\bar{T}_e - \bar{T}) q(s) + ha T_c(s) \quad (1.101)$$

$$(m_c C_p s + \rho \bar{q}_c C_p + ha) T_c(s) = \rho \bar{q}_c C_p T_{c_e}(s) + \rho C_p (\bar{T}_{c_e} - \bar{T}_c) q_c(s) + ha T(s) \quad (1.102)$$

Por simple sustitución, es posible obtener la relación entre $T(s)$ y $q_c(s)$, es decir la función de transferencia entre la variable controlada y la manipulada, para lo cual se hace necesario que todas las demás entradas se consideren nulas.

$$\frac{T(s)}{q_c(s)} = \frac{ha (\bar{T}_{c_e} - \bar{T}_c)}{(m_c + m) s^2 + [m_c (\bar{q} + ha) + m (\bar{q}_c + ha)] s + (\bar{q}_c \bar{q} + \bar{q}_c ha + \bar{q} ha)}$$

Problema resuelto 1.3 .

En la Fig. 1.40 se muestra un esquema simplificado de transporte de carga, para el cual es necesario controlar la velocidad de desplazamiento de la carga (v_c), manipulando el voltaje aplicado al motor (e). Dicho motor impone una velocidad angular (ω_m) al eje elástico que tiene conectado, el cual se encuentra rígidamente unido a una polea sobre la que gira la banda que transporta la carga.

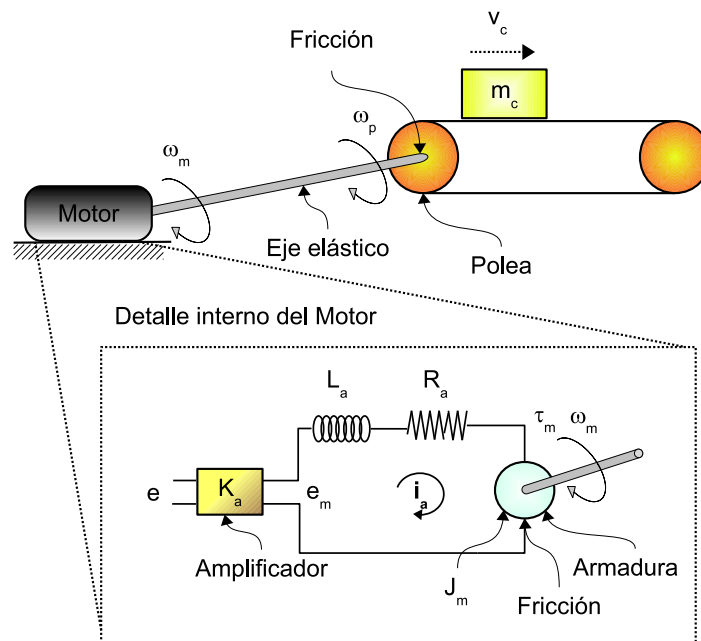


Figura 1.40: Transporte de Carga

Se desea obtener el modelo del proceso y su diagrama de bloques para lo cual es necesario tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- El voltaje de entrada al motor es amplificado, de forma tal que el voltaje que recibe el circuito es igual a $e_m = K_a e$.
- Dicho circuito muestra en forma simplificada las características del motor eléctrico, en el cual L_a representa la inductancia, R_a la resistencia eléctrica y J_m la inercia rotacional de las partes rotativas del motor que giran a una velocidad ω_m .
- Las relaciones de transformación en el motor son las siguientes, $\tau_m = K_1 i_a$ y $e_a = K_2 \omega_m$, donde el τ_m proporciona el movimiento a la inercia del motor y e_a es la caída de potencial en la armadura.
- En el motor, la fricción produce un torque que se opone al movimiento de la inercia del motor igual a $\tau_{fm} = R_{fm} \omega_m^2$.
- El eje, que tiene una constante de elasticidad igual a k_e , une al motor con la polea.
- La polea tiene un radio igual a r y una inercia igual a J_p , la cual se mueve gracias al torque transmitido por el eje, τ_e . También se debe considerar una fricción en el apoyo de la polea que produce un torque opositor a la inercia de la polea igual a $\tau_{fp} = R_{fp} \omega_p^2$.
- Las relaciones de transformación en la polea son las siguientes, $\tau_c = r F_c$ y $v_c = \omega_p r$, donde F_c es la fuerza de oposición de la carga sobre la polea.
- La carga tiene una masa igual a m_c y no hay desplazamiento relativo entre ella y la cinta transportadora.
- Efecto de la gravedad despreciable pues el movimiento es en el plano horizontal.

Solución

Se procederá a hacer una lista con todos los elementos del sistema y a partir de allí la obtención del modelo podrá realizarse en forma sencilla.

Fuentes	Voltaje entrada (e)				
Almacenadores	I. (i_a)	I. motor (ω_m)	Cap. eje (τ_e)	I. polea (ω_p)	I. carga (v_c)
Resistencias	Resistencia Elect.	Fricción motor	Fricción polea		
Transformadores	Motor	Polea			

Se observa que existen cinco elementos almacenadores de energía, pero las dos últimas variables de estado, es decir ω_p y v_c , son dependientes entre sí. A continuación se plantearán las cinco ecuaciones diferenciales, donde las dos últimas colapsarán en una sola.

$$L_a \frac{di_a}{dt} = K_a e - R_a i_a - e_a \Rightarrow L_a \frac{di_a}{dt} = K_a e - R_a i_a - K_2 \omega_m \quad (1.103)$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = \tau_m - \tau_e - R_{fm} \omega_m^2 \Rightarrow J_m \frac{d\omega_m}{dt} = K_1 i_a - \tau_e - R_{fm} \omega_m^2 \quad (1.104)$$

$$\left(\frac{1}{k_e} \right) \frac{d\tau_e}{dt} = \omega_m - \omega_p \quad (1.105)$$

$$J_p \frac{d\omega_p}{dt} = \tau_e - r F_c - R_{fp} \omega_p^2 \quad (1.106)$$

$$m_c \frac{dv_c}{dt} = F_c \quad (1.107)$$

En las Ecs. 1.106 y 1.107 aparece la variable F_c que no es ni variable de estado ni entrada, sino que es la variable intermedia que conecta a dichas ecuaciones. Es por ello que, escogiendo a v_c como la variable independiente, se utilizará la Ec. 1.106 para sustituir el valor de F_c en la Ec. 1.107 y la Ec. 1.105 se debe modificar pues ω_p debe ser sustituida en función de v_c .

$$\left(\frac{1}{k_e} \right) \frac{d\tau_e}{dt} = \omega_m - \left(\frac{v_c}{r} \right) \quad (1.108)$$

$$m_c \frac{dv_c}{dt} = \left(\frac{1}{r} \right) \left[\tau_e - R_{fp} \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 - J_p \frac{d \left(\frac{v_c}{r} \right)}{dt} \right]$$

$$\left[m_c + \left(\frac{J_p}{r^2} \right) \right] \frac{dv_c}{dt} = \left(\frac{1}{r} \right) \left[\tau_e - R_{fp} \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 \right] \quad (1.109)$$

Resumiendo, el modelo requerido es no lineal y está representado por las Ecs. 1.103, 1.104, 1.108 y 1.109. Las ecuaciones ya linealizadas son las que se muestran a continuación, en donde las variables en equilibrio se deben obtener de igual forma que se ha hecho en ejercicios anteriores.

$$L_a \frac{di_a^*}{dt} = K_a e^* - R_a i_a^* - K_2 \omega_m^*$$

$$J_m \frac{d\omega_m^*}{dt} = K_1 i_a^* - \tau_e^* - (2R_{fm} \bar{\omega}_m) \omega_m^*$$

$$\left(\frac{1}{k_e} \right) \frac{d\tau_e^*}{dt} = \omega_m^* - \left(\frac{v_c^*}{r} \right)$$

$$\left[m_c + \left(\frac{J_p}{r^2} \right) \right] \frac{dv_c^*}{dt} = \left(\frac{1}{r} \right) \left[\tau_e^* - \left(\frac{2R_{fp} \bar{v}_c}{r} \right) v_c^* \right]$$

Tomando la transformada de Laplace se obtiene el diagrama de bloques de dichas ecuaciones, el cual se muestra en la Fig. 1.41.

$$L_a s I_a(s) = K_a E(s) - R_a I_a(s) - K_2 \omega_m(s)$$

$$J_m s \omega_m(s) = K_1 I_a(s) - \tau_e(s) - (2R_{fm} \bar{\omega}_m) \omega_m(s)$$

$$\left(\frac{1}{k_e}\right) s \tau_e(s) = \omega_m(s) - \left(\frac{V_c(s)}{r}\right)$$

$$\left[m_c + \left(\frac{J_p}{r^2}\right)\right] s V_c(s) = \left(\frac{1}{r}\right) \left[\tau_e(s) - \left(\frac{2R_{fp} \bar{v}_c}{r}\right) V_c(s)\right]$$

Para la realización del diagrama se plantea la siguiente simplificación de sus parámetros,

$$A = 2R_{fm} \bar{\omega}_m \quad B = m_c + \left(\frac{J_p}{r^2}\right) \quad C = \frac{2R_{fp} \bar{v}_c}{r}$$

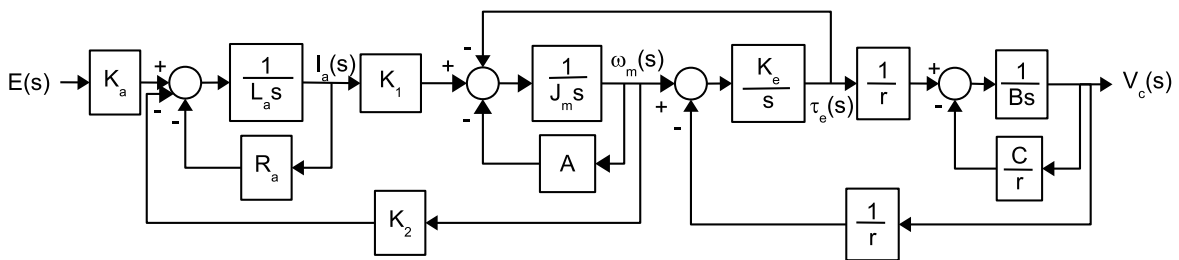


Figura 1.41: Transporte de Carga (Diagrama de Bloques)

Problema resuelto 1.4 .

Partiendo del modelo desarrollado en la parte b) del Ejercicio 1.8 se desea plantear un esquema de control de retroalimentación simple, en donde la variable controlada sea la temperatura del tanque (T_T) y la manipulada el voltaje (e). Para ello se requiere que usted realice lo siguiente:

- a) Función de transferencia entre la variable controlada y la manipulada.
- b) Función o funciones de transferencia entre la variable controlada y la o las posibles perturbaciones. Para ello suponga conocidos los valores de las entradas y además, considere que la temperatura ambiente puede variar.

Solución

a) Para poder obtener las funciones de transferencia requeridas es necesario linealizar las ecuaciones del modelo, para lo cual se debe obtener el punto de operación, $\bar{p}(\bar{i}, \bar{H}, \bar{T}_T)$, tal como se realizó en ejercicios anteriores. Este paso que se obviará en esta solución por ser sumamente sencillo de realizar.

$$L \frac{di^*}{dt} = e^* - Ri^*$$

$$A \frac{dH^*}{dt} = q_E^* - (2Cv\bar{H})H^*$$

$$\begin{aligned} \rho A \bar{H} \frac{dT_T^*}{dt} = & (2\bar{i}R) i^* + (\bar{q}_E \rho C p) T_E^* + (\rho C p \bar{T}_E) q_E^* - (Cv\sqrt{\bar{H}} \rho C p) T_T^* - \left(\frac{Cv\rho C p \bar{T}_T}{2\sqrt{\bar{H}}} \right) H^* - \dots \\ & \dots (h_T a_T + h_S a_S) (T_T^* - T_o^*) - \rho A \bar{T}_T \left(\frac{dH^*}{dt} \right) \end{aligned} \quad (1.110)$$

Los parámetros de la Ec. 1.110 serán sustituidos por variables auxiliares tal como se muestra en la Ec. 1.111, con el objeto de simplificarla. Así mismo, se toma la transformada de Laplace de las tres ecuaciones, quedando las mismas como se muestra en las Ecs. 1.112, 1.113 y 1.114.

$$\rho A \bar{H} \frac{dT_T^*}{dt} = \alpha i^* + \beta T_E^* + \gamma q_E^* - \delta T_T^* - \lambda H^* - \phi (T_T^* - T_o^*) - \omega \left(\frac{dH^*}{dt} \right) \quad (1.111)$$

en donde,

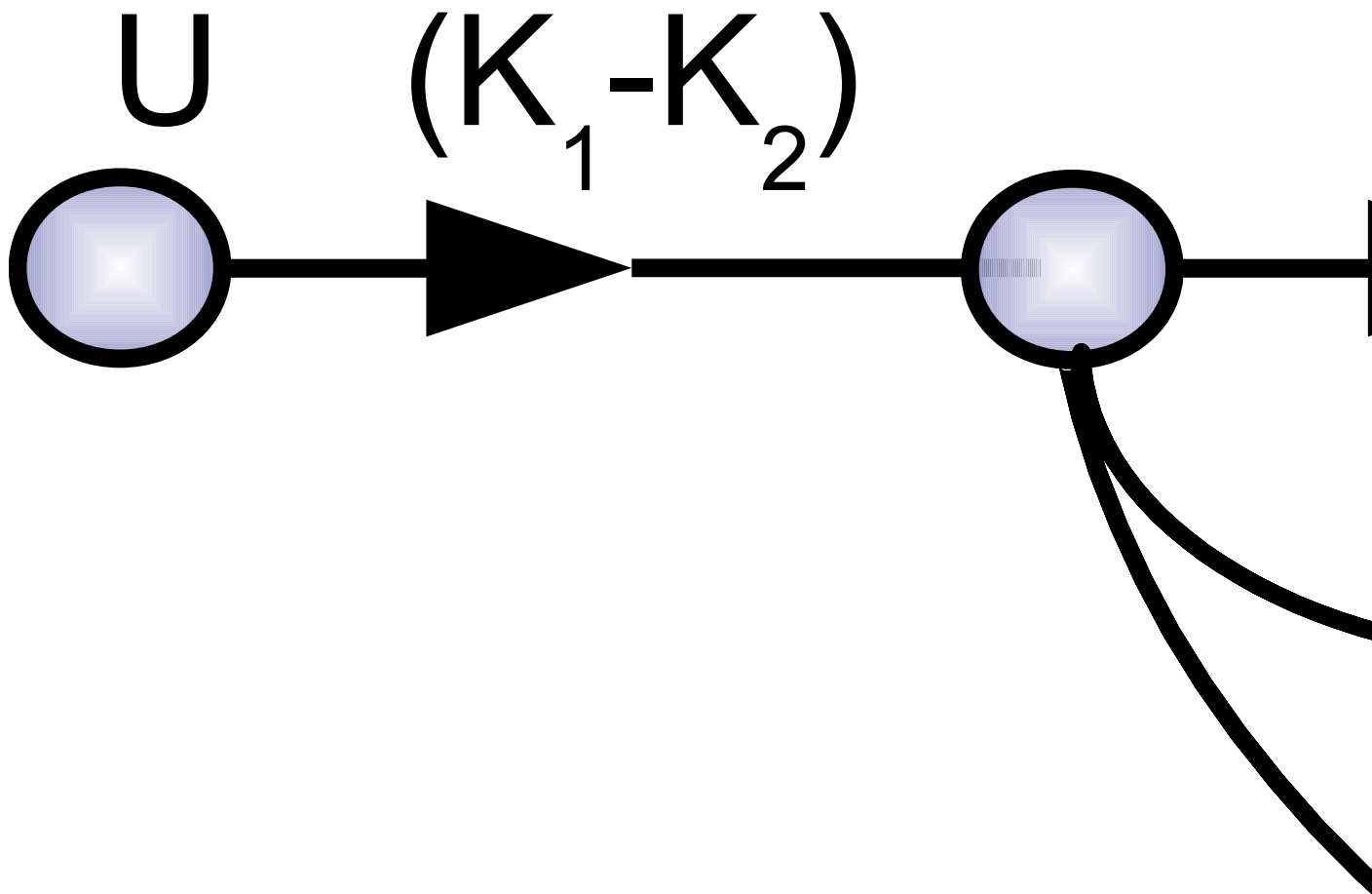
$$\begin{aligned} \alpha &= 2\bar{i}R & \beta &= \bar{q}_E \rho C p & \gamma &= \rho C p \bar{T}_E & \delta &= Cv\sqrt{\bar{H}} \rho C p \\ \lambda &= \frac{Cv\rho C p \bar{T}_T}{2\sqrt{\bar{H}}} & \phi &= h_T a_T + h_S a_S & \omega &= \rho A \bar{T}_T \end{aligned}$$

$$LsI(s) = E(s) - RI(s) \quad (1.112)$$

$$AsH(s) = q_E(s) - (2Cv\bar{H})H(s) \quad (1.113)$$

$$\begin{aligned} \rho A \bar{H} s T_T(s) = & \alpha I(s) + \beta T_E(s) + \gamma q_E(s) - \delta T_T(s) - \lambda H(s) - \phi (T_T(s) - T_o(s)) - \dots \\ & \dots - \omega s H(s) \end{aligned} \quad (1.114)$$

Para obtener las funciones de transferencia solicitadas se utiliza el diagrama de flujo de señal de las ecuaciones del proceso que se muestra en la Fig. 1.42 y aplicar la fórmula de Mason. Para lo cual se deben reconocer las trayectorias directas y los lazos del diagrama. En principio, se obtendrá la función de transferencia entre la variable controlada y la manipulada, posteriormente se obtendrán las otras funciones de transferencia.



1 Representación de Sistemas Físicos

Trayectorias directas entre $T_T(s)$ y $E(s)$

$$M_1 = \left(\frac{1}{Ls} \right) \alpha \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right)$$

Lazos

$$L_1 = - \left(\frac{1}{Ls} \right) (R) \quad L_2 = - \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) (\delta) \quad L_3 = - \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) (\phi) \quad L_4 = - \left(\frac{1}{As} \right) \left(\frac{1}{2C_V \bar{H}} \right)$$

Conocidos los lazos del diagrama se procede a calcular el Δ general, el particular a la trayectoria directa reconocida y la función de transferencia solicitada.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_4 + L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_4 + L_3 L_4) - (L_1 L_2 L_4 + L_1 L_3 L_4)$$

$$\Delta_1 = 1 - L_4$$

$$G_E(s) = \frac{T_T(s)}{E(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$$

b) Una vez conocidos los lazos y el determinante general Δ es muy sencillo calcular las otras funciones de transferencia requeridas, para lo cual solamente es necesario determinar las trayectorias directas de cada caso y su Δ_K particular, tal como se muestra a continuación.

Función de transferencia entre $T_T(s)$ y $q_E(s)$

$$M_1 = \left(\frac{1}{As} \right) (-\lambda) \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) \quad M_2 = \left(\frac{1}{As} \right) (-\omega s) \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) \quad M_3 = \gamma \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right)$$

$$\Delta_1 = 1 - L_1 \quad \Delta_1 = 1 - L_1 \quad \Delta_1 = 1 - L_1$$

$$G_{qE}(s) = \frac{T_T(s)}{q_E(s)} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + M_3 \Delta_3}{\Delta}$$

Función de transferencia entre $T_T(s)$ y $T_E(s)$

$$M_1 = \beta \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) \quad \Delta_1 = 1 - L_1$$

$$G_{T_E}(s) = \frac{T_T(s)}{T_E(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$$

Función de transferencia entre $T_T(s)$ y $T_o(s)$

$$M_1 = \phi \left(\frac{1}{\rho A \bar{H} s} \right) \quad \Delta_1 = 1 - L_1$$

$$G_{T_o}(s) = \frac{T_T(s)}{T_o(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$$

Problema resuelto 1.5 .

A partir del diagrama de bloques que se mostró en la Fig. 1.41 se desea obtener la función de transferencia entre la variable manipulada $E(s)$ y la controlada $V(s)$, para lo cual se requiere la reducción del diagrama.

Solución

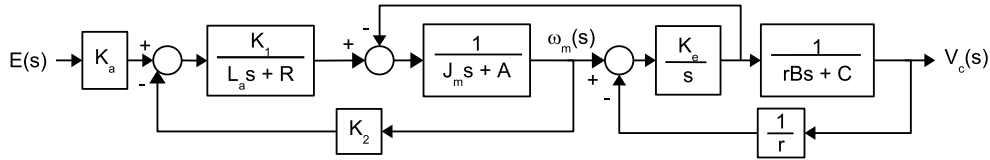


Figura 1.43: Primera Reducción

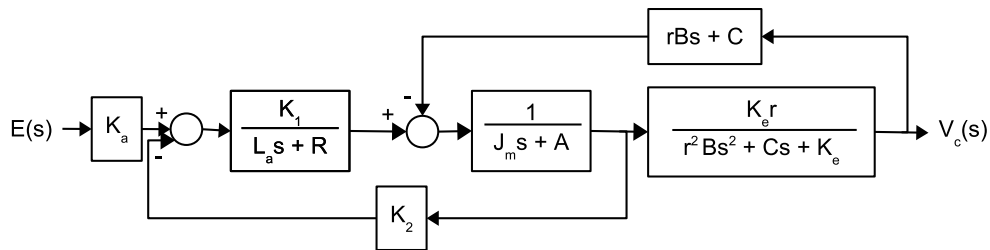


Figura 1.44: Segunda Reducción

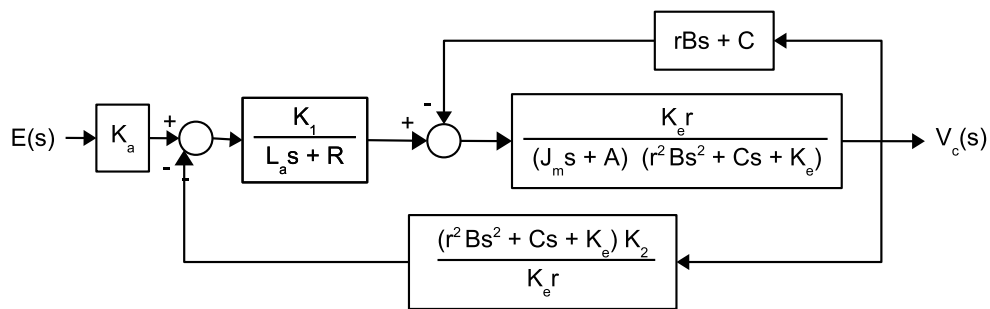


Figura 1.45: Tercera Reducción

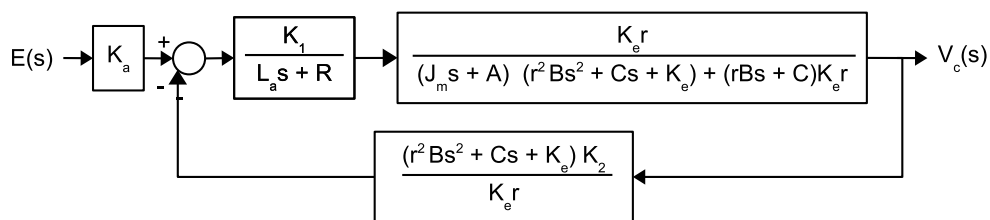


Figura 1.46: Cuarta Reducción

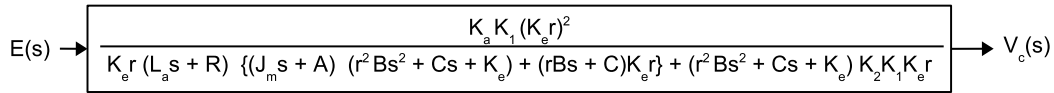


Figura 1.47: Reducción Final

Problema resuelto 1.6 .

Utilice las ecuaciones 1.94, 1.95, 1.96 y 1.97 del modelo desarrollado en el ejercicio resuelto 1.1 y obtenga la función de transferencia entre la variable manipulada y la controlada utilizando para ello la Fórmula de Ganancia de Mason.

Solución

Para poder obtener cualquier función de transferencia se debe partir de las ecuaciones lineales del proceso y aplicarles la transformada de Laplace, las cuales se muestran a continuación. Las mismas se utilizarán para el desarrollo del diagrama de flujo de señal .

$$\left(\frac{A_1}{\rho g}\right) sP_1(s) = q_A(s) + q(s) - \left(\frac{1}{R_1}\right) P_1(s)$$

$$\left(\frac{A_2}{\rho g}\right) sP_2(s) = \left(\frac{1}{R_1}\right) P_1(s) - \left(\frac{1}{R_3}\right) (P_2(s) - P_3(s)) - \left(\frac{1}{R_2}\right) P_2(s)$$

$$\left(\frac{A_3}{\rho g}\right) sP_3(s) = q_B(s) + \left(\frac{1}{R_3}\right) (P_2(s) - P_3(s)) - q(s)$$

$$\left(\frac{\rho L}{A_T}\right) s q(s) = P_3(s) + P_B(s) - (2R_4 \bar{q}) q(s)$$

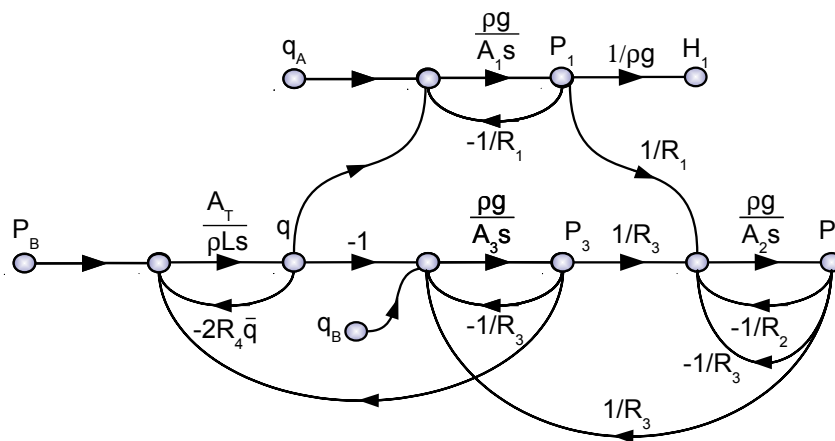


Figura 1.48: Distribución de Agua (Diagrama de Flujo de Señal)

Para aplicar la fórmula de Mason se deben reconocer las trayectorias directas y los lazos del diagrama, los cuales se muestran a continuación.

Trayectorias directas entre $H_1(s)$ y $P_B(s)$

$$M_1 = \left(\frac{A_T}{\rho L s} \right) \left(\frac{\rho g}{A_1 s} \right) \left(\frac{1}{\rho g} \right)$$

Lazos

$$L_1 = \left(\frac{A_T}{\rho L s} \right) (-2R_4 \bar{q}) \quad L_2 = - \left(\frac{A_T}{\rho L s} \right) \left(\frac{\rho g}{A_3 s} \right) \quad L_3 = \left(\frac{A_T}{\rho L s} \right) \left(\frac{\rho g}{A_1 s} \right) \left(\frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{\rho g}{A_2 s} \right) \left(\frac{1}{R_3} \right) \left(\frac{\rho g}{A_3 s} \right)$$

$$L_4 = \left(\frac{\rho g}{A_3 s} \right) \left(-\frac{1}{R_3} \right) \quad L_5 = \left(\frac{\rho g}{A_3 s} \right) \left(\frac{1}{R_3} \right) \left(\frac{\rho g}{A_2 s} \right) \left(\frac{1}{R_3} \right) \quad L_6 = \left(\frac{\rho g}{A_2 s} \right) \left(-\frac{1}{R_2} \right)$$

$$L_7 = \left(\frac{\rho g}{A_2 s} \right) \left(-\frac{1}{R_3} \right) \quad L_8 = \left(\frac{\rho g}{A_1 s} \right) \left(-\frac{1}{R_1} \right)$$

Conocidos los lazos del diagrama se procede a calcular el Δ general, el particular a la trayectoria directa reconocida y la función de transferencia solicitada.

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + \dots \\ & \dots + [L_1(L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + L_2(L_6 + L_7 + L_8) + L_4(L_6 + L_7 + L_8) + L_5L_8 + L_6L_8 + L_7L_8] - \dots \\ & \dots - [L_1L_4(L_6 + L_7 + L_8) + L_4L_8(L_7 + L_8)] + \dots \\ & \dots + L_1L_4L_8(L_6 + L_7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & 1 - (L_4 + L_5 + L_6 + L_7) + \dots \\ & \dots + L_4(L_6 + L_7) - \dots \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$$

Problema resuelto 1.7 .

El Diagrama de Bloques que se muestra en la Fig. 1.49 representa un proceso de laminación de aluminio, para el cual se requiere conocer la relación de transferencia entre la variable $C(s)$ y las entradas $R(s)$ y $P(s)$.

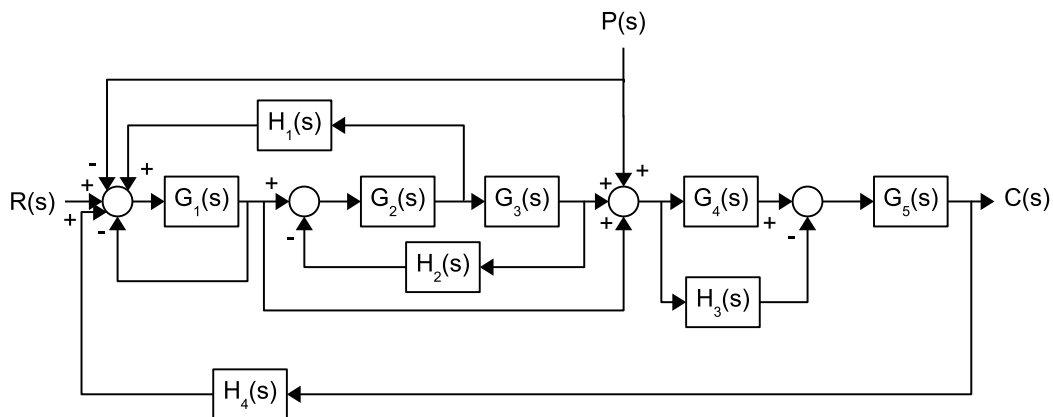


Figura 1.49: Diagrama de Bloques

Solución

La obtención de la relación de transferencia requerida se realiza por reducción del diagrama mostrado o utilizando la fórmula de ganancia de Mason. A continuación se mostrarán ambas soluciones con la intención ejemplificar ambos métodos.

a) Por reducción del Diagrama de Bloques

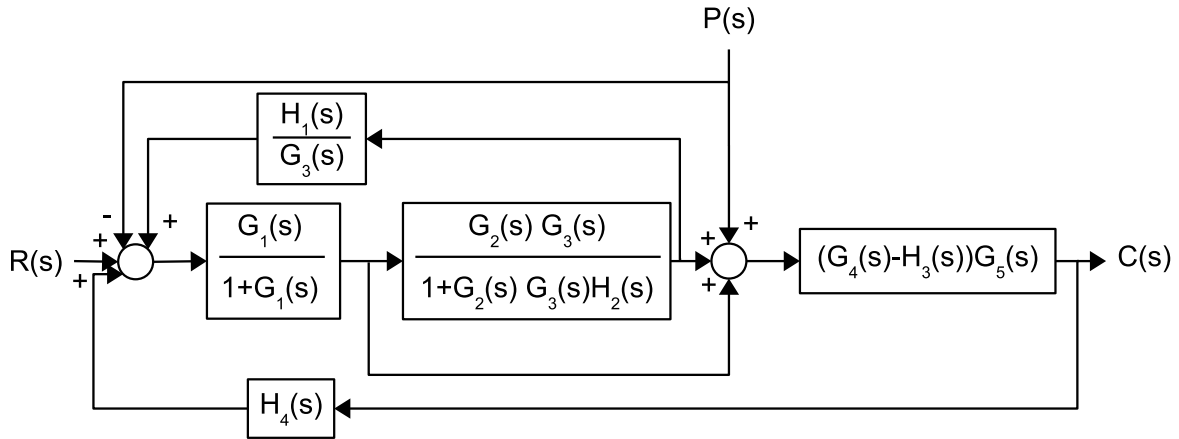


Figura 1.50: Diagrama de Bloques (Paso 1)

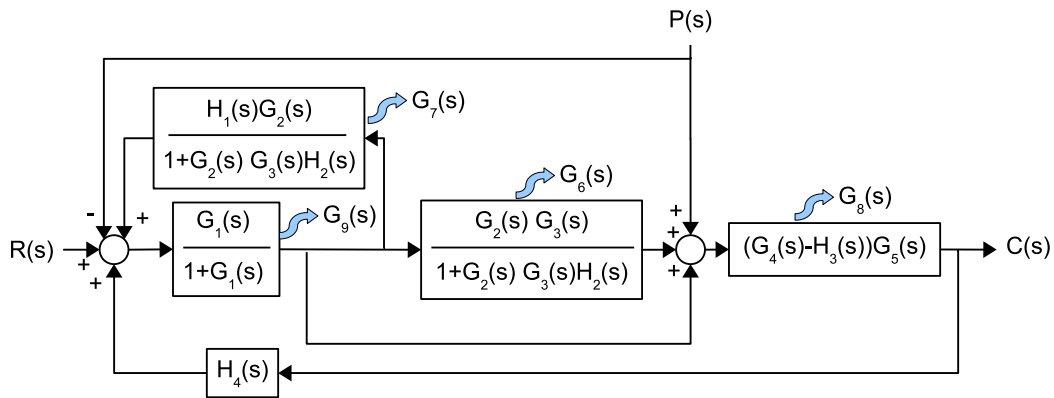


Figura 1.51: Diagrama de Bloques (Paso 2)

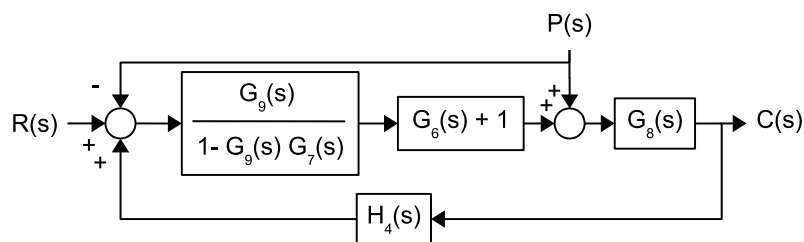


Figura 1.52: Diagrama de Bloques (Paso 3)

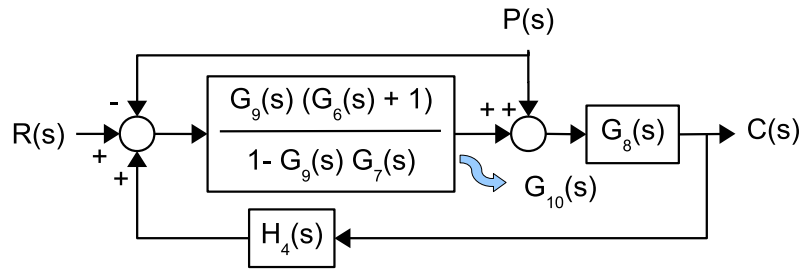


Figura 1.53: Diagrama de Bloques (Paso 4)

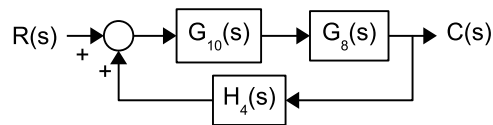


Figura 1.54: Diagrama de Bloques (Paso 5)

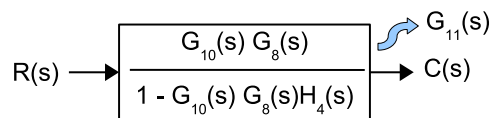


Figura 1.55: Diagrama de Bloques (Paso 6)

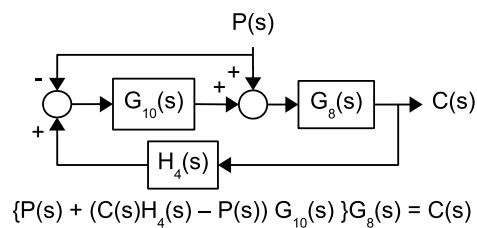


Figura 1.56: Diagrama de Bloques (Paso 7)

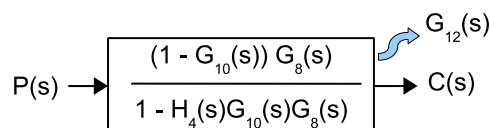


Figura 1.57: Diagrama de Bloques (Paso 8)

Una vez conocidas las funciones de transferencia entre la salida y las dos entradas, la relación de transferencia solicitada es la que se muestra en la Ec. 1.115.

$$C(s) = G_{11}(s)R(s) + G_{12}(s)P(s) \quad (1.115)$$

b) Utilizando la Fórmula de Mason

Lo primero que debe hacerse es desarrollar el diagrama de Mason a partir del diagrama de bloques. Cabe destacar que ambos diagramas son completamente semejantes.

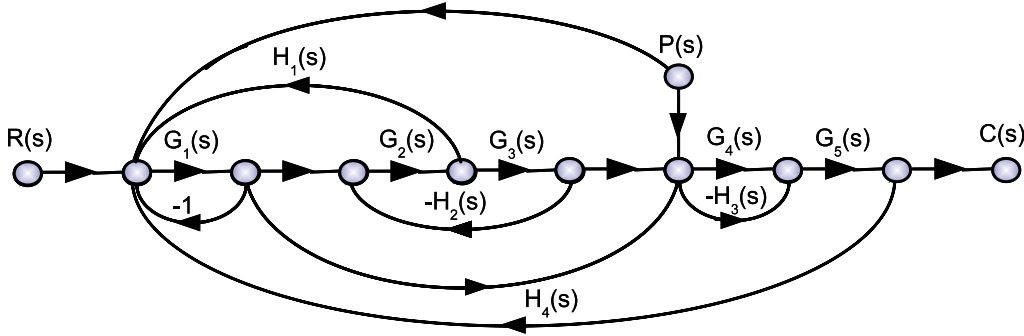


Figura 1.58: Diagrama de Flujo de Señal

Lazos del diagrama y determinante general del diagrama

$$L_1 = -G_1 \quad L_2 = G_1G_2H_1 \quad L_3 = G_1G_2G_3G_4G_5H_4 \quad L_4 = G_1G_2G_3(-H_3)G_5H_4$$

$$L_5 = G_1(1)G_4G_5H_4 \quad L_6 = G_1(1)(-H_3)G_5H_4 \quad L_7 = G_2G_3(-H_2)$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7) + (L_1L_7 + L_7L_5 + L_7L_6)$$

Trayectorias directas entre C(s) y R(s), determinantes particulares y relación entre C(s) y R(s)

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \quad P_2 = G_1G_2G_3(-H_3)G_5 \quad P_3 = G_1(1)G_4G_5 \quad P_4 = G_1(1)(-H_3)G_5$$

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1 \quad \Delta_3 = 1 - L_7 \quad \Delta_4 = 1 - L_7$$

$$G_R(s) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4}{\Delta}$$

Trayectorias directas entre C(s) y P(s), determinantes particulares y relación entre C(s) y P(s)

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \quad P_2 = G_1G_2G_3(-H_3)G_5 \quad P_3 = G_1(1)G_4G_5$$

$$P_4 = G_1(1)(-H_3)G_5 \quad P_5 = G_4G_5 \quad P_6 = (-H_3)G_5$$

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1 \quad \Delta_3 = 1 - L_7$$

$$\Delta_4 = 1 - L_7 \quad \Delta_5 = 1 - (L_1 + L_2 + L_7) + (L_1L_7) \quad \Delta_6 = 1 - (L_1 + L_2 + L_7) + (L_1L_7)$$

$$G_P(s) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4 + P_5 \Delta_5 + P_6 \Delta_6}{\Delta}$$

De allí que la relación de transferencia entre C(s) y las dos entradas es la siguiente.

$$C(s) = G_R(s)R(s) + G_P(s)P(s)$$

Problema resuelto 1.8 .

Una aleta de enfriamiento es modelada utilizando las Ecs. 1.63, 1.64 y 1.65, las cuales se desarrollaron en en Ej. 1.7. Utilizando dichas ecuaciones y sin realizar ninguna simplificación de las mismas, se requiere que usted realice el diagrama de bloques del sistema.

Solución

Las ecuaciones del modelo son lineales, por lo que no es necesario linealizar, pues al hacerlo las ecuaciones quedarían iguales pero en variables de perturbación, es por ello que se toma directamente la transformada de Laplace.

$$m_1 C_p s T_1(s) = \dot{Q}_E - \frac{kA}{\Delta x} (T_1(s) - T_2(s)) - h_1 a_1 (T_1(s) - T_o(s))$$

$$m_2 C_p T_2(s) = \frac{kA}{\Delta x} (T_1(s) - T_2(s)) - \frac{kA}{\Delta x} (T_2(s) - T_3(s)) - h_2 a_2 (T_2(s) - T_o(s))$$

$$m_3 C_p T_3(s) = \frac{kA}{\Delta x} (T_2(s) - T_3(s)) - h_3 a_3 (T_3(s) - T_o(s))$$

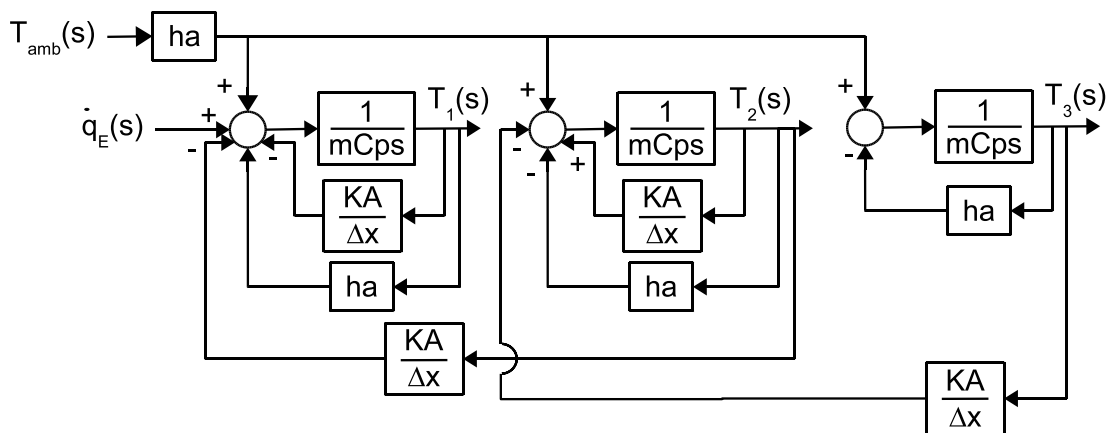


Figura 1.59: Diagrama de Bloques Aleta Enfriamiento

Problema resuelto 1.9 .

Partiendo del modelo desarrollado en el ejercicio 1.2 se desea que Ud. identifique las posibles perturbaciones y obtenga las funciones de transferencia entre éstas y la variable manipulada. Posteriormente realice el diagrama de bloques del esquema de control planteado, en donde figuren todas las perturbaciones con sus respectivas funciones de transferencia.

Solución

Las perturbaciones presentes serán la temperatura, el caudal de entrada y la temperatura de entrada de la camisa (\$T_e\$, \$q\$ y \$T_{c_e}\$). Las funciones de transferencia se obtienen por simple sustitución a partir de las Ecs. 1.101 y 1.102 que representan el modelo del proceso.

Función de Transferencia entre \$T(s)\$ y \$T_e(s)\$

$$G_{T_e}(s) = \frac{T(s)}{T_e(s)} = \frac{\bar{q}(m_c s + \bar{q}_c + ha)}{(mm_c)s^2 + [m_c(\bar{q} + ha) + m(\bar{q}_c + ha)]s + (\bar{q}_c\bar{q} + \bar{q}_c ha + \bar{q}ha)}$$

Función de Transferencia entre $T(s)$ y $q(s)$

$$G_q(s) = \frac{T(s)}{q(s)} = \frac{(\bar{T}_e - \bar{T})(m_c s + \bar{q}_c + ha)}{(mm_c)s^2 + [m_c(\bar{q} + ha) + m(\bar{q}_c + ha)]s + (\bar{q}_c\bar{q} + \bar{q}_c ha + \bar{q}ha)}$$

Función de Transferencia entre $T(s)$ y T_{c_e}

$$G_{T_{c_e}}(s) = \frac{T(s)}{T_{c_e}(s)} = \frac{\bar{q}_c ha}{(mm_c)s^2 + [m_c(\bar{q} + ha) + m(\bar{q}_c + ha)]s + (\bar{q}_c\bar{q} + \bar{q}_c ha + \bar{q}ha)}$$

Conocidas las funciones de transferencia entre, la variable controlada y la manipulada, y entre la variable manipulada y las perturbaciones, el diagrama de bloques del esquema de control quedará como se muestra el la Fig. 1.60.

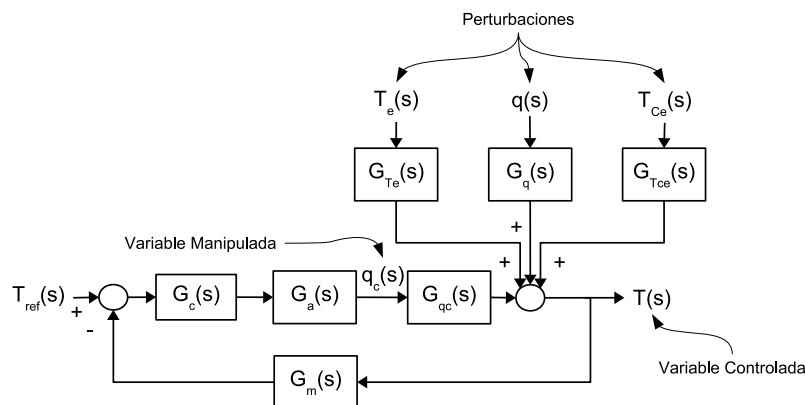


Figura 1.60: Esquema de Control (Intercambiador de Calor)

1.8. Problemas Propuestos

Ejercicio propuesto 1.1 .

En la Fig. 1.61 se muestra el esquema de un tanque que contiene un fluido de capacidad calórica C_p , masa m y densidad ρ . En el mismo se encuentra sumergido un serpentín por el cual circula vapor, gracias al cual es posible controlar la temperatura en el tanque manipulando el flujo de vapor en el serpentín. Con la intención de implementar un esquema de control de retroalimentación simple se requiere desarrollar un modelo del proceso, para lo cual deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones.

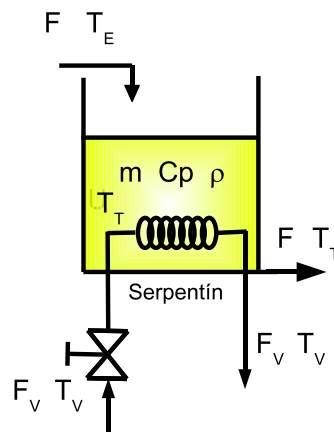


Figura 1.61: Esquema del proceso

- La retención de líquido en el tanque se supone constante.
- El flujo de calor entre el serpentín y el fluido (\dot{Q}) es por convección y es representado utilizando la relación que se muestra en la Ec. 1.116, en la cual h y A deben considerarse como parámetros conocidos y ΔT es la diferencia de temperaturas entre el vapor y el fluido.

$$\dot{Q} = hA(\Delta T) \quad (1.116)$$

- La temperatura en el serpentín es T_v , la cual se mantiene constante.
- El flujo de entrada al tanque (q_e) y la temperatura del mismo (T_e) deben ser considerados como posibles perturbaciones.

Tomando en cuenta las consideraciones mencionadas anteriormente se desea que usted realice lo siguiente:

a) Dibuje sobre el esquema del proceso el sistema de control propuesto.

b) Obtenga el modelo del proceso.

c) Realice el diagrama de bloques del proceso, en el cual figuren cada una de las perturbaciones al mismo. Realice lo anterior sin realizar ninguna manipulación de las ecuaciones del modelo. Añádale a dicho diagrama, el sistema de control propuesto. Para ello considere conocidas las funciones de transferencia del medidor $G_m(s)$, controlador $G_c(s)$ y actuador $G_a(s)$.

d) Finalmente, obtenga las funciones de transferencia entre la variable controlada y la manipulada, y entre la variable controlada y cada una de las perturbaciones. A partir de allí plantee la relación de transferencia entre la variable controlada y cada una de las variables que la modifiquen.

Ejercicio propuesto 1.2 .

El esquema de un mecanismo posicionador de masa que se muestra en la Fig. 1.62 tiene un funcionamiento que se describe a continuación:

- Se aplica una fuerza F sobre un pistón de masa despreciable, la cual es transmitida completamente como una presión sobre el líquido contenido en la tubería.
- Las áreas transversales de las dos tuberías y sus longitudes son A_1 , A_2 , L_1 y L_2 , en tanto que, el área del tanque es A_3 .
- Las tuberías son rugosas y presentan pérdidas equivalentes a $\Delta P_i = b_i q_i^2$, donde i define la tubería y b es el parámetro característico de dicho fenómeno.

1 Representación de Sistemas Físicos

- El caudal que circula por la válvula se determina utilizando la expresión, $q = C_v \sqrt{\Delta P}$.
- Considere conocidos el resto de los parámetros involucrados en el proceso, es decir, la densidad del fluido (ρ), la gravedad (g), la constante del resorte (k), la masa del segundo pistón (m) y el área de los pistones (A_p).

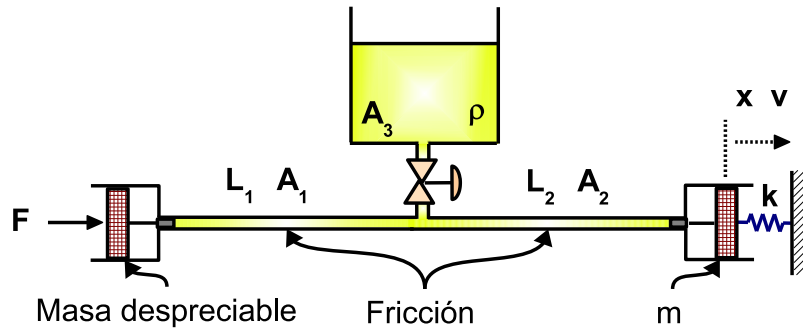


Figura 1.62: Mecanismo Posicionador

A partir de estas consideraciones se desea que obtenga las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del proceso, su diagrama de bloques y la función de transferencia entre la posición de la masa y la fuerza aplicada.

Ejercicio propuesto 1.3 .

En la Fig. 1.63 se muestra un tanque cerrado a la atmósfera para el cual se desea conocer una función de transferencia que describa el comportamiento de la altura de líquido ante variaciones en el caudal de entrada q . Para ello considere que el gas se comporta como un gas ideal y que conoce todos los parámetros involucrados en el fenómeno, tales como, área del tanque A , densidad del líquido ρ , densidad del gas ρ_g , masa de gas contenida m_g , constante universal de los gases ideales R y coeficiente de la válvula C_v .

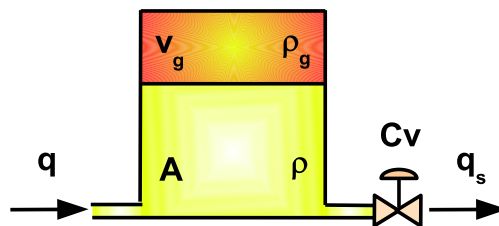


Figura 1.63: Tanque Cerrado

Ejercicio propuesto 1.4 .

En la Fig. 1.64 se muestra un mecanismo en el cual dos masas, m_1 y m_2 están unidas a través de una barra de masa despreciable. Suponga conocidos todos los parámetros involucrados, tales como, valor de las masas m_1 y m_2 , constante elástica de los dos resortes k_1 y k_2 , y las longitudes de

la barra L_1 y L_2 . Además, para describir el comportamiento de los resortes utilice las relaciones planteadas en la Sec. 1.1.1.1. A partir de allí se desea que realice lo siguiente:

a) Desarrolle un modelo en variables de estado que represente el comportamiento de las velocidades de las masas, v_1 y v_2 , para el caso en que, partiendo del reposo, a la masa m_1 se le aplica una fuerza externa F .

b) Obtenga el diagrama de bloques de dicho sistema y a partir de allí, encuentre la función de transferencia entre F y v_2 .

c) Finalmente, si la masa de la barra fuese apreciable, tal que, la inercia de la misma fuese igual a J , indique si ésto provocaría modificaciones en el modelo desarrollado y de ser así, obtenga un nuevo modelo que considere lo planteado.

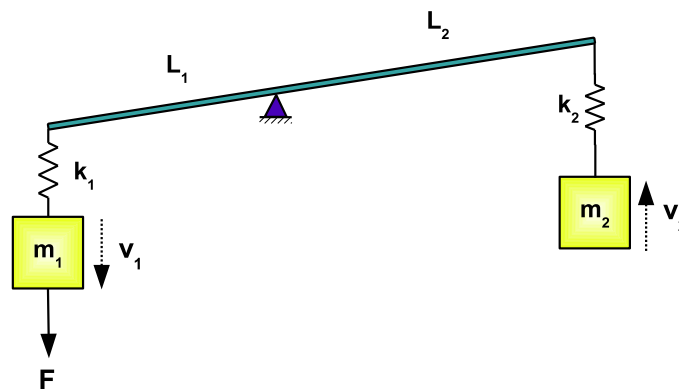


Figura 1.64: Sistema Mecánico

Ejercicio propuesto 1.5 .

La Fig. 1.65 muestra esquemáticamente un reactor de área A constante en el cual se mezclan los flujos A y B cuyos caudales y temperaturas de entrada son q_A , T_A y q_B , T_B respectivamente. El caudal de salida se define en función de la altura de líquido en el reactor como $q_S = C_v \sqrt{\Delta P}$ y se considera que la temperatura de salida es igual a la del reactor T_R . Con el objeto de enfriar el contenido del reactor y mantener controlada la temperatura del mismo, se manipula el caudal que circula por la camisa que cubre al reactor. El fluido dentro de la camisa es capaz de almacenar calor siendo su calor específico igual a C_{pC} y su densidad ρ_C , los cuales se consideran constantes. La masa encerrada en la camisa es constante e igual a m_C , pues el caudal de entrada y el de salida de la misma son iguales (q_C). La temperatura de entrada a la camisa es T_1 y la de salida es igual a la temperatura de la camisa T_C . El líquido contenido en el reactor es capaz de almacenar calor siendo su calor específico igual a C_{pR} y su densidad igual a ρ_R .

Considere que el flujo de calor entre el líquido y la camisa, y entre la camisa y el ambiente se definen como $\dot{Q} = R_{XY} (T_X - T_Y)$ si el calor va de X a Y . La temperatura ambiental (T_o) es variable.

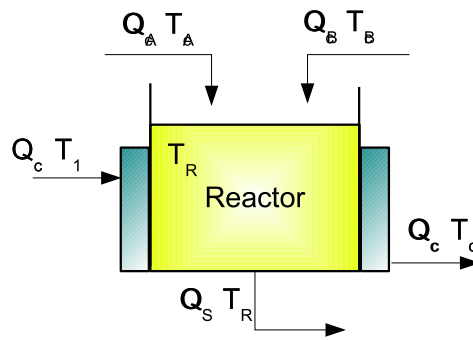


Figura 1.65: Esquema del Reactor

Con el objeto de analizar el comportamiento del proceso se desea que usted obtenga lo siguiente:

- Modelo del proceso en variables de estado
- Diagrama de Bloques del proceso, considerando constantes las temperaturas T_A y T_1 . Así mismo, q_A , q_B , T_o y T_B deben ser considerados como variables en el tiempo.
- Diagrama de Bloques del esquema de retroalimentación simple planteado. Suponga conocidas las funciones de transferencia del medidor, del controlador y del actuador. Dibuje sobre el proceso el esquema de control.
- Función de transferencia entre la temperatura del reactor T_R y el caudal de la camisa q_C
- Relación de transferencia entre la variable controlada y cada una de las entradas

Ejercicio propuesto 1.6 .

En la Fig. 1.66 se muestra un esquema de control que busca regular la temperatura del fluido contenido en un tanque modificando el calor suministrado por un serpentín sumergido en él.

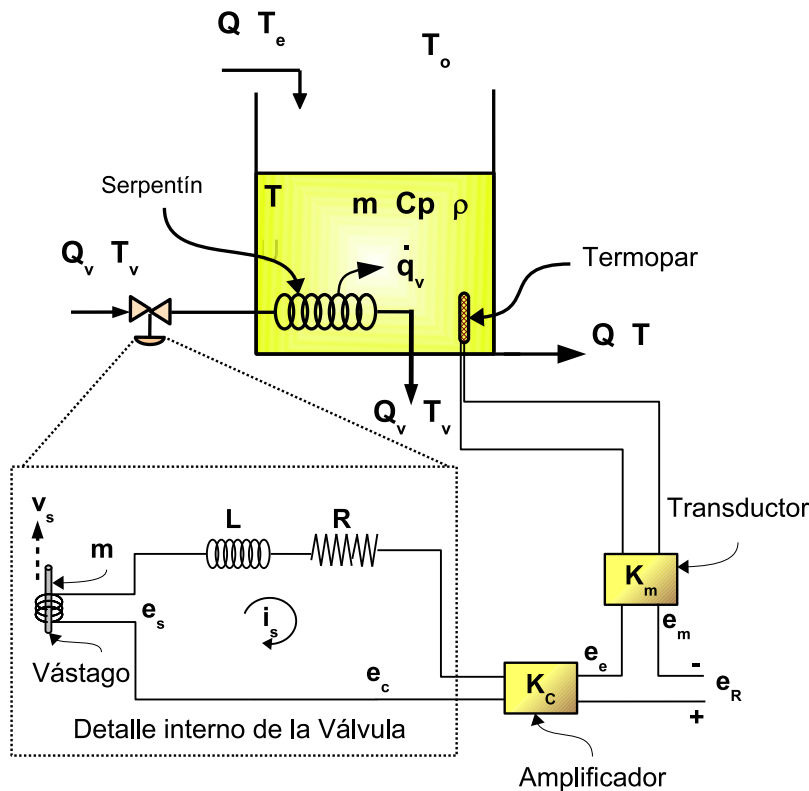


Figura 1.66: Control de Temperatura

El esquema de control planteado utiliza una válvula solenoide que regula el flujo de vapor que circula a través del serpentín. En dicho esquema se resaltan los siguientes aspectos:

- Al tanque entra un caudal Q a una temperatura T_e y sale el mismo caudal a la temperatura del tanque T , teniendo el fluido encerrado en el tanque una masa m , una densidad ρ y un calor específico C_p .
- La temperatura del tanque es medida utilizando un termopar que produce un voltaje de salida proporcional a la temperatura medida y se representa utilizando la siguiente relación, $e_m = K_m T$, donde K_m vendría a ser el parámetro característico del elemento medidor, T la temperatura medida y e_m el voltaje producido a la salida del elemento.
- e_R es la entrada calibrada del valor de la temperatura deseada, el cual es comparado con la temperatura medida e_m , de forma tal que se obtiene el voltaje $e_e = e_R - e_m$. Dicho voltaje es amplificado, obteniéndose el voltaje $e_c = K_c e_e$ que es recibido por el circuito que regula la posición del vástago de la válvula.
- En el circuito mencionado, R representa su resistencia, L la inductancia, i_s la intensidad que circula por el circuito y e_s la caída de potencial producida por el movimiento del vástago.
- Las relaciones de transformación de la válvula son las que se muestran en las Ecs. 1.117 y 1.118, donde K_s es una constante de transformación, V_s la velocidad del vástago y F_s la fuerza que el solenoide aplica sobre la masa del vástago m para lograr el cambio de su posición.

$$e_s = K_s V_s \quad (1.117)$$

$$F_s = \left(\frac{1}{K_s} \right) i_s \quad (1.118)$$

1 Representación de Sistemas Físicos

- El movimiento de la masa provoca una pérdida por fricción equivalente a $F_f = K_f v_s^2$.
- El flujo de vapor, Q_V , viene dado por la posición del vástago x_s y cumple con la siguiente relación, $Q_V = K_V x_s$.
- La transferencia por convección hacia el ambiente se describe como $\dot{q}_{conv} = hA_c(T - T_o)$.
- Finalmente el flujo de calor entregado por el serpentín, \dot{Q} , es proporcional al flujo de vapor que circula por él, $\dot{q}_S = K_T Q_V$.

A partir de lo anterior se desea que usted obtenga:

- a) Modelo del completo del sistema de control, el cual incluya el proceso con todas sus perturbaciones.
- b) Diagrama de bloques del mismo, en el cual identifique los siguientes elementos: medidor, error, controlador, accionador y proceso.
- c) Función de transferencia del proceso.

Ejercicio propuesto 1.7 .

Un modelo de prueba para un sistema de suspensión de un vehículo es ser representado utilizando las ecuaciones diferenciales que se muestran en las Ecs. 1.119, 1.120, 1.121 y 1.122, en las cuales $v_1(t)$ y $x_1(t)$ son la velocidad y el desplazamiento de una masa m_1 , en tanto que $v_2(t)$ y $x_2(t)$ son la velocidad y el desplazamiento de una masa m_2 . $F_1(t)$ y $F_2(t)$ deben ser consideradas como variables de entradas y la gravedad g es constante. El resto de lo contenido en dichas ecuaciones son parámetros físicos constantes. A partir de esta información usted debe realizar lo siguiente:

- a) Diagrama de Bloques independiente de cada una de las ecuaciones, sin realizar ninguna simplificación de las mismas.
- b) Diagrama de Bloques del sistema de suspensión completo
- c) Obtenga las funciones de transferencia entre $x_1(t)$ y $F_1(t)$ y entre $x_1(t)$ y $F_2(t)$.

No debe obtener las funciones de transferencia solicitadas por simplificación de las ecuaciones, sino simplificando el diagrama de bloques obtenido o utilizando la regla de Mason.

$$m_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = F_1(t) + m_1 g - k_1 (x_1(t) - x_2(t)) - b_1 (v_1(t) - v_2(t)) \quad (1.119)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = v_1(t) \quad (1.120)$$

$$m_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = F_2(t) + m_2 g + k_1 (x_1(t) - x_2(t)) - b_1 (v_1(t) - v_2(t)) - k_2 x_2(t) - b_2 v_2(t) \quad (1.121)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = v_2(t) \quad (1.122)$$

Ejercicio propuesto 1.8 .

Para el esquema del reactor que se mostró en la Fig. 1.65 se desea que usted proponga los lazos de control de retroalimentación simple necesarios (independientes entre sí), tal que se logre controlar el nivel dentro del reactor, la temperatura y la concentración de la salida (suponga que la concentración de la salida C_s puede ser modificada variando el flujo de A o de B). Para ello dispone de todos medidores y válvulas de control que considere necesarios.

Para cada esquema de control especifique la variable controlada, la manipulada y las posibles perturbaciones y realice el diagrama de bloques de cada uno de los esquemas, en el cual figuren las variables antes mencionadas.